

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra aplikované mechaniky

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Napětově-deformační chování nerezové  
oceli 316L při proporcionálním namáhání

Stress-Strain Behaviour of 316L Stainless  
Steel under Proportional Loading

Student:

Bc. Jakub Sagáčík

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra aplikované mechaniky

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jakub Sagáčík**  
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Napětově-deformační chování nerezové oceli 316L při proporcionálním namáhání**  
**Stress-Strain Behaviour of 316L Stainless Steel under Proportional Loading**

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

- 1) Popis a vyhodnocení již realizovaných experimentů
- 2) Návrh a provedení nových experimentů - tah/tlak, krut a kombinace tahu/tlaku a torze
- 3) Simulace vybraných testů
- 4) Vyhodnocení

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] HALAMA, R. Řešení elastoplastické napjatosti v bodovém styku dvou zakřivených těles pomocí MKP. Disertační práce v oboru Aplikovaná mechanika. Ostrava: FS VŠB-TU OSTRAVA, 2005, 130 S.
- [2] HALAMA, R. aj. Parameter Identification of Chaboche Nonlinear Kinematic Hardening Model. In: Sborník konference Aplikovaná mechanika 2007, Malenovice 16.-19.4.2007. Ed. Frydryšek K. et al. Ostrava: VŠB-TUO Katedra pružnosti a pevnosti, 2007, s. 97-98.
- [3] KUNZ, L. Experimentální stanovení únavových charakteristik materiálů. Žilina: Edis – vydavatelství Žilinské univerzity, 2003, 81 s.
- [4] ANSYS INC. Documentation for ANSYS Release 11.0. SAS IP, Inc., 2007.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.**

Datum zadání: 09.12.2016

Datum odevzdání: 15.05.2017



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry

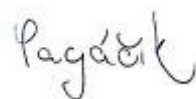


doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě: 15. května 2017

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Pagáčik', written in a cursive style.

Podpis studenta.

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.

- беру на ве́домі́, že Vysoká škola Báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB–TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).

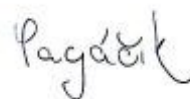
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.

- bylo sjednáno, že VŠB-TUO, případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.

- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě od mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do její skutečné výše).

- беру на ве́домі́, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 15. května 2017



Podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Jakub Sagáček

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Sokolská 1091, Valašské Meziříčí

## **ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE**

SAGÁČIK, J. *Napětově-deformační chování nerezové oceli 316L při proporcionálním namáhání: diplomová práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2017, 71 stran. Vedoucí práce: Halama, R.

Diplomová práce se zabývá vyhodnocováním napětově-deformačních charakteristik nerezové oceli 316L a vytvoření maker pro další výpočty pomocí metody konečných prvků, použitelných v programu ANSYS APDL. První část práce se věnuje teoretické části cyklické plasticity, kde jsou zmíněny aditivní zákon, podmínka plasticity, kritéria zatěžování, pravidlo zpevnění. Poté následuje vyhodnocování experimentálních měření pro různé typy namáhání. Následně jsou provedeny simulace pomocí metody konečných prvků v programu ANSYS APDL. Poslední kapitola se zabývá srovnáním výsledků vyhodnocených experimentálně, a výsledků simulací numerického řešení.

Klíčová slova: nerezová ocel 316L, různé typy namáhání, simulace MKP

## **ANNOTATION OF MASTER THESIS**

SAGÁČIK, J. *Stress-Strain Behaviour of 316L Stainless Steel under Proportional Loading*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2017, 71 pages. Head of thesis: Halama, R.

This thesis deals with evaluate the stress-strain behaviour of 316L stainless steel and four macros has been created for using them in next simulation using the finite element method in software ANSYS APDL. The first part of thesis is focused on the theory of cyclic plasticity which contains additional law, condition of plasticity, loading criteria, rule of hardening. Then follows the evaluations of experimental measurements with the different types of loading. The the simulations has been done using the finite element method in software ANSYS APDL. The last part of thesis includes the comparison of the results measured from experiments and using the numerical solution.

Keywords: 316L stainless steel, different loading, FEM simulation

# Obsah

Seznam značek a použitých symbolů .....	8
1 Úvod .....	11
2 Experimentální poznatky .....	13
2.1 Bauschingerův efekt .....	16
2.2 Cyklická deformační křivka .....	17
2.3 Masingovo chování .....	18
3 Inkrementální teorie plasticity .....	19
3.1 Aditivní zákon .....	19
3.2 Podmínka plasticity .....	20
3.3 Pravidlo normality .....	21
3.3.1 Izotropní zpevnění .....	21
3.3.2 Kinematické zpevnění .....	22
3.3.3 Kombinované zpevnění .....	23
3.4 Zátěžná kritéria a podmínka konzistence .....	24
3.5 Pragerův model .....	25
3.6 Nelineární kinematické modely zpevnění .....	25
3.7 Modely v MKP software .....	26
3.8 Armstrong-Fredericův model .....	27
3.8.1 Kalibrace Armstrong-Fredericova modelu .....	29
3.8.2 A-F model s kombinovaným zpevněním .....	30
3.9 Chabocheův model .....	30
3.9.1 Kalibrace Chabocheova modelu .....	32
4 Vyhodnocení experimentálních měření .....	34
4.1 Tah/tlak .....	34
4.2 Krut .....	42
4.3 Kombinace tah-tlak/krut .....	45
4.4 Ratcheting .....	46
5 Určení konstant Chabocheova modelu .....	48
6 Výpočet MKP .....	49
6.1 Tah/tlak .....	49
6.2 Krut .....	52
6.3 Kombinace tahu/tlaku a krutu .....	54
6.4 Ratcheting .....	56

7	Srovnání výsledků MKP a experimentu .....	58
7.1	Tah/tlak .....	58
7.2	Krut .....	59
7.3	Kombinace tahu/tlaku a krutu .....	61
7.4	Ratcheting .....	62
8	Závěr .....	64
	Použitá literatura .....	67
	Příloha A – Výkres zkušebního vzorku plného .....	70
	Příloha B – Výkres zkušebního vzorku dutého .....	71
	Příloha C – CD nosič .....	72

## Seznam značek a použitých symbolů

Označení	Název	Jednotka
$\sigma$	Napětí	[MPa]
$\varepsilon$	Poměrné prodloužení	[-]
$\varepsilon_p$	Plastická deformace	[-]
$\sigma_f$	Dopředné napětí	[MPa]
$\sigma_r$	Zpětné napětí	[MPa]
$\sigma_{\max}$	Maximální osově napětí	[MPa]
$\sigma_2$	Napětí při odlehčení	[MPa]
$\sigma_Y$	Mez kluzu	[MPa]
$\sigma_a$	Amplituda napětí	[MPa]
$K'$	Součinitel cyklické pevnosti	[MPa]
$n'$	Exponent cyklického zpevnění	[-]
$\varepsilon_{ap}$	Amplituda plastické deformace	[-]
$\varepsilon_e$	Elastická deformace	[-]
$E$	Dynamický modul pružnosti v tahu	[MPa]
$\sigma$	Tenzor napětí	[MPa]
$D$	Tenzor elastických konstant	[MPa]
$\sigma_{1\text{norm}}$	Normálové napětí	[MPa]
$f(\sigma)$	Funkce plasticity	[MPa]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hlavní napětí	[MPa]
$Y$	Aktuální poloměr plochy plasticity	[MPa]
$\alpha$	Kinematický tenzor napětí	[MPa]
$C$	Parametr zpevnění	[MPa]
$d\varepsilon_p$	Přírůstek plastické deformace	[-]
$\gamma$	Materiálová konstanta	[-]
$\mu$	Poissonovo číslo	[-]
$\alpha_x$	Kinematické napětí	[MPa]
$\psi$	Indikátor směru zatěžování	[-]
$R$	Izotropní proměnná	[MPa]
$dp$	Přírůstek akumulované plastické deformace	[-]



$b$	Materiálová konstanta	[-]
$R_{\infty}$	Materiálová konstanta	[MPa]
$\{\alpha_i\}$	i-tá část kinematického tenzoru napětí	[MPa]
$\alpha_s$	Střední kinematické napětí	[MPa]
$\sigma_{sml}$	Smluvní napětí	[MPa]
$F$	Síla	[N]
$S$	Plocha průřezu	[m <sup>2</sup> ]
$\sigma_{skut}$	Skutečné napětí	[MPa]
$\varepsilon_{log}$	Logaritmická deformace	[-]
$\sigma_h$	Horní napětí v každém vrcholu cyklu	[MPa]
$\sigma_d$	Dolní napětí v každém vrcholu cyklu	[MPa]
$N$	Počet cyklů	[-]
$\sigma_{min}$	Minimální napětí	[MPa]
$\varepsilon_{lin}$	Lineární elastická deformace	[-]
$\varepsilon_{pl_{lin}}$	Plastická deformace lineární	[-]
$\varepsilon_{pl_{log}}$	Plastická deformace logaritmická	[-]
$\varepsilon_{posun_{pl}}$	Posunutá plastická deformace logaritmická	[-]
$\sigma_{posun}$	Posunuté skutečné napětí	[MPa]
$Q$	Hodnota posuvu větví hyster.smyček	[-]
$R$	Součinitel nesymetrie cyklu	[-]
$\tau$	Smykové napětí	[MPa]
$\gamma$	Zkos	[-]
$W_k$	Průřezový modul v krutu	[m <sup>3</sup> ]
$D$	Vnější průměr vzorku	[m]
$d$	Vnitřní průměr vzorku	[m]
$\pi$	Ludolfovo číslo	[-]
$M_k$	Kroutící moment	[Nm]
$\sigma_{eqv}$	Ekvivalentní napětí	[MPa]
$\varepsilon_{eqv}$	Ekvivalentní deformace	[-]
$\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \sigma_{m3}$	Střední napětí pro 3 sekvence	[MPa]
$C_1, C_2$	Konstanty Chabocheova modelu	[MPa]

$\gamma_1, \gamma_2$	Konstanty Chabocheova modelu	[-]
----------------------	------------------------------	-----

## 1 Úvod

Většina strojních součástí je namáhána časově proměnným zatěžováním, při kterém může dojít k únavě materiálu. Historicky první zmínka o „únavě“ materiálu se objevila v knize o mechanice od J.V. Ponceleta, vydaná v roce 1839. O pár let později, tj. v roce 1850, popsal Augustín Wöhler tzv. Wöhlerovu křivku, která popisuje závislost amplitudy napětí na počtu cyklů. V historii se stalo několik havárií ať už letadel či lodí, které byly právě způsobeny únavou materiálu. Jedna z nejmladších havárií, která se v poslední době udála, je z roku 2005, kdy spadlo letadlo Chalk's Ocean Airways Flight 101, které letělo z Floridy na Bahamy. Letadlo ztratilo pravé křídlo pár minut po vzletu, asi cca ve 150 m. Bylo nakonec prokázáno, že důvodem havárie letadla byla rychle šířící se trhлина na pravém křídle (v důsledku únavy materiálu). Celé křídlo se od letadla utrhl krátce po vzletu letadla. Na Obr.1 je ukázán kus pravého křídla, vytaženého z vody.



*Obr.1 – Pravé křídlo letadla Flight 101 [1].*

Tak to byla na úvod lehká motivace pro čtenáře a důkaz, že díky únavě materiálů mohou vzniknout katastrofy, ohrožující lidský život. Od té doby byly samozřejmě dále předpisy pro kontrolu stavu letadel zpřísnovány. A teď zpátky ke vzniku únavy materiálu a k zatěžování součástí.

K únavě materiálu může dojít i při namáhání pod mezí kluzu. Strojní součást může být namáhána na tah/tlak, ohyb, krut, ale také i jejich kombinací (tah/tlak + krut apod.). Kontaktní a jiné typy úloh mohou vést také na prostorovou napjatost. Pokud se mění pouze velikost hlavních napětí od jednotlivých zatížení a nemění se jejich směry, označujeme toto namáhání jako proporcionální. Pro proporcionální namáhání také platí, že poměr velikosti složek tenzoru napjatosti od jednotlivých zatížení je v každém okamžiku stejný. Pokud je poměr velikosti složek tenzoru napjatosti v čase proměnný, jedná se o neproportionální namáhání v daném bodě tělesa. Pro součást a její životnost je mnohem nepříznivější stav, pokud je zatěžována proporcionálně (myšleno pro ekvivalentní amplitudu zatížení).

V dnešní době se k odhadu životnosti součásti používá často software založený na metodě konečných prvků, avšak pro výpočet je nutné znát některé materiálové parametry, které se určují z experimentů. Lze tedy říci, že experiment je nedílnou součástí pro výpočet pomocí metody konečných prvků.

Snaha je, aby experiment, který se provede z důvodu stanovení materiálových parametrů, byl co nejvíce podobný reálnému zatěžování součásti, tj. pokud je v praxi očekáváno pouze jednoosé namáhání, je proveden experiment pouze pro tah/tlak. Z experimentu lze určit napětově-deformační chování materiálu. Důležité pojmy, související s touto tematikou, budou podrobněji vysvětleny v dalších kapitolách.

## 2 Experimentální poznatky

Kovový materiál při cyklickém zatěžování může vykazovat následující napětově-deformační chování:

### 1. Dokonale pružné

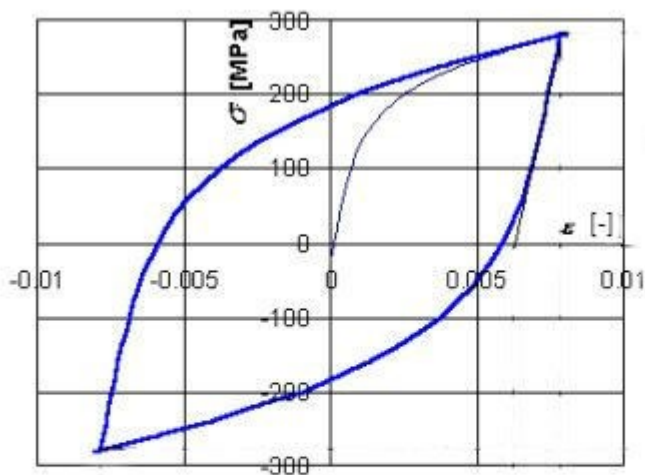
- Nedojde k překročení meze úměrnosti. Předpokládá se, že se materiál ve všech cyklech chová ideálně pružně a nedojde k poruše materiálu v důsledku únavy materiálu.

### 2. Elastické přizpůsobení

- Během prvních cyklů zatěžování nastává plastická deformace, v dalších cyklech je už elastické přizpůsobení. Materiál bývá často porušen mechanismem vysokocyklové únavy.

### 3. Cyklická plasticita

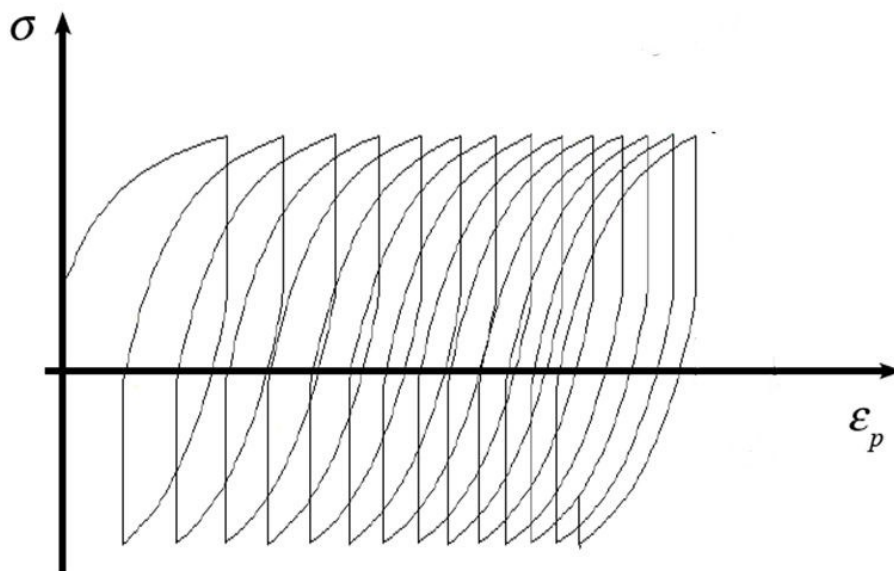
- Pro tento případ je typická uzavřená hysterezní smyčka (Obr.2). Hysterezní smyčka ukazuje závislost mezi napětím a poměrnou deformací. Materiál bývá porušen mechanismem nízkocyklové únavy.



Obr.2 – Uzavřená hysterezní smyčka [2]

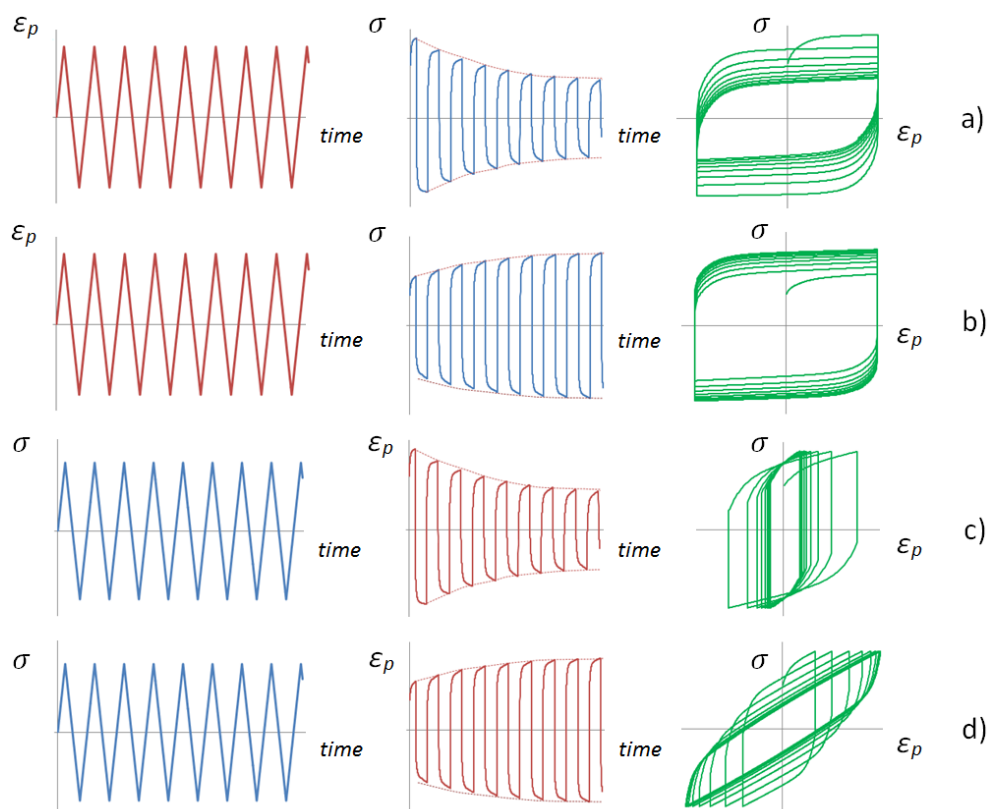
### 4. Cyklické tečení (ratcheting)

- K ratchetingu dochází pokud se plastická deformace akumuluje s každým cyklem. Uni-axiální ratcheting je charakterizován otevřenou hysterezní smyčkou (Obr.3).



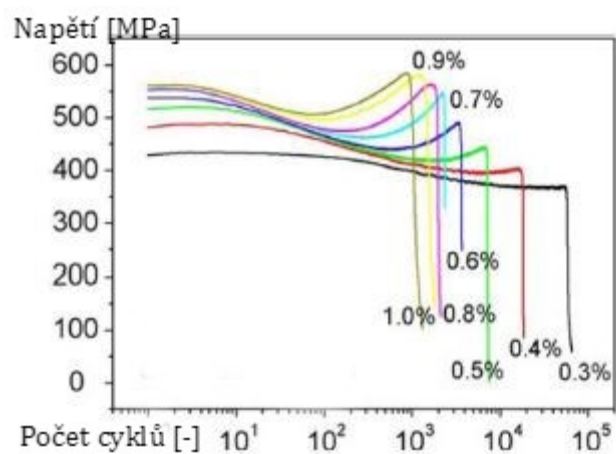
*Obr.3 – Otevřená hysterezní smyčka [3].*

Cyklické zatěžování může být řízeno dvěma způsoby. První způsob zatěžování je s konstantní amplitudou napětí, mění se amplituda deformace. Tomuto způsobu řízení zkoušky se říká „Měkké zatěžování“. Druhým způsobem je řízení s konstantní amplitudou celkové deformace a mění se amplituda napětí. Tomuto způsobu řízení zkoušky se říká „Tvrdé zatěžování“. Materiál obecně klade odpor proti cyklickému zatěžování a ten odpor se může v průběhu zatěžování zvyšovat, nebo snižovat, nebo mít nemonotónní průběh [4]. Pokud amplituda deformace klesá, jedná se o cyklické zpevnění materiálu (Obr.4c). Pokud amplituda deformace roste, jedná se o cyklické změkčování (Obr.4d). U tvrdého zatěžování pokud napětí roste, potom se jedná o cykl. zpevnění (Obr.4b) a pokud klesá, jedná se o cykl.změkčení (Obr.4a).



Obr.4 – Různé druhy zatěžování. [5]

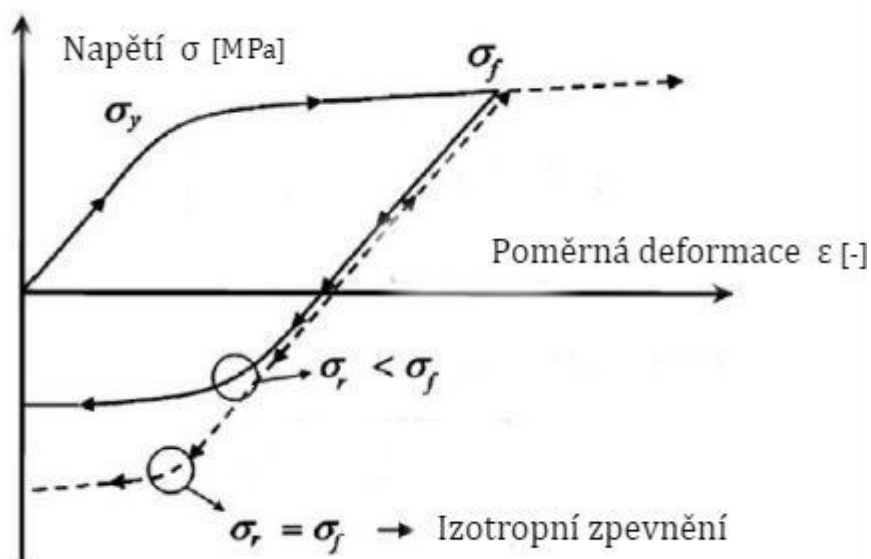
Z Obr.5 lze zjistit, že materiál může v jistém počtu cyklů cyklicky zpevňovat a poté ve zbytku své životnosti cyklicky změkčovat. Pro některé vzorky může dojít i k opětovnému zpevňování materiálu za polovinou své životnosti.



Obr.5 – Cyklické zpevňování a změkčování materiálu. [6]

## 2.1 Bauschingerův efekt

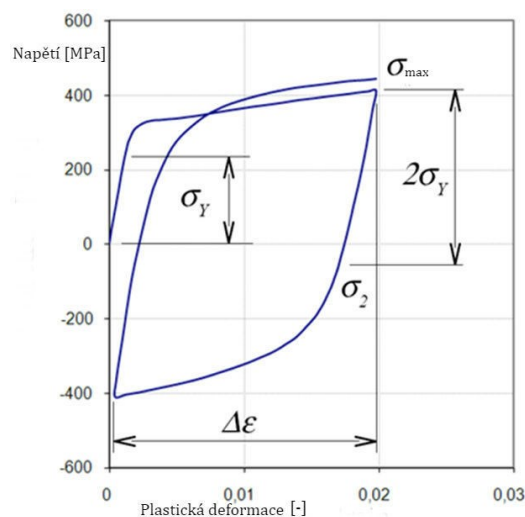
U jednoosého namáhání je vzorek namáhán na tah-tlak. Pokud se dopředné napětí  $\sigma_f$  rovná zpětnému napětí  $\sigma_r$ , potom materiál vykazuje izotropní zpevnění. Mnoha experimenty, kdy vzorek byl zatížen tahem, následně odlehčen a zatížen tlakem, bylo prokázáno, že zpětné napětí je nižší než dopředné napětí. Tento efekt je nazýván jako Bauschingerův efekt. Izotropní zpevnění neumožňuje zachycení Bauschingerova efektu (Obr.6).



Obr.6 – Bauschingerův efekt. [7]

Bylo také zjištěno, že pokud z maximálního osového napětí  $\sigma_{max}$  se začne vzorek odlehčovat až do napětí  $\sigma_2$ , materiál vykazuje elastické chování, které je rovno dvojnásobku meze kluzu daného materiálu. Vysvětluje to Obr.7, na kterém je možné vidět, že právě  $\sigma_{max} - \sigma_2 = 2 \cdot \sigma_Y$ .





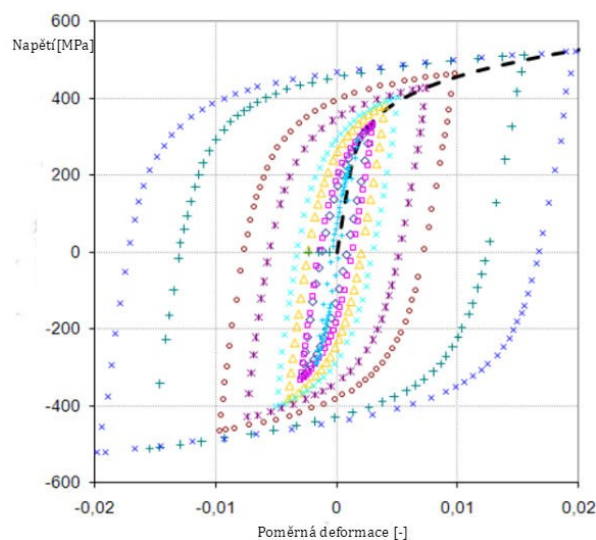
Obr.7 – Bauschingerův efekt potvrzený experimentálně u oceli 11523. [3]

## 2.2 Cyklická deformační křivka

Z experimentální zkoušky nízkocyklové únavy, kde je vzorek cyklicky zatížen jednoosým namáháním, se vyhodnotí satureované (ustálené) hysterezní smyčky. Hysterezní smyčka je ustálená, pokud materiál nezpevňuje a ani nezměkčuje. Mnohdy se vyhodnocují hysterezní smyčky v polovině životnosti vzorku. Z výsledků zkoušek pro různé rozkmity deformace je možné získat několik hysterezních smyček. Při proložení vrcholů těchto hysterezních smyček křivkou, lze získat cyklickou deformační křivku, kterou je možné vidět na Obr.8 vpravo. Body hysterezních smyček pro různé rozkmity deformace je zvykem prokládat mocninnou funkcí.

$$\sigma_a = K' \cdot \varepsilon_{ap}^{n'}, \quad (2.1)$$

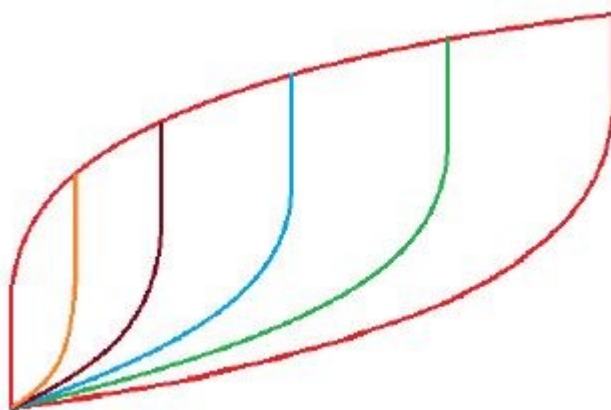
kde  $K'$  je součinitel cyklické pevnosti a  $n'$  je exponent cyklického zpevnění.



Obr.8 – Cyklická deformační křivka – materiál 11523. [5]

### 2.3 Masingovo chování

Masingovo chování vykazují materiály právě tehdy, když ze zjištěných hysterezních smyček pro různé amplitudy deformace, které jsou v závislosti napětí – plastická logaritmická deformace, se můžou všechny hysterezní smyčky zarovnat k tahové větvi a všechny dolní okraje těchto smyček se překrývají. U kovových materiálu není Masingovo chování velmi časté. Na Obr.9 je teoretické znázornění Masingova chování. Toto chování vykazuje stabilní mikrostrukturu při únavovém procesu.



Obr.9 – Masingovo chování. [3]

### 3 Inkrementální teorie plasticity

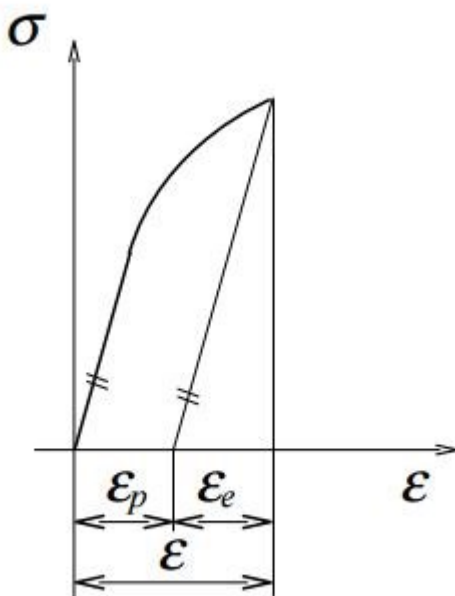
Teorie je založena na poznatcích zjištěných u namáhání při jednoosém napěťovém stavu.

#### 3.1 Aditivní zákon

Celkovou deformaci je možné rozdělit na složku elastickou a složku plastickou

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p . \quad (3.1)$$

Aby došlo k nevratným deformacím, musí být překročena mez kluzu materiálu. Pokud je materiál zatížen a dojde k překročení meze kluzu a následně je odlehčen, lze pozorovat, že se materiál chová lineárně, a lze složky deformace rozdělit právě na složku elastickou a plastickou (Obr.10).



Obr. 10 – Elastická a plastická složka celkové deformace. [8]

Pro elastickou složku deformace platí Hookeův zákon

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_e , \quad (3.2)$$

kde  $E$  je dynamický modul pružnosti v tahu (Youngův modul). Princip superpozice složek napětí platí i pro víceosý napěťový stav. Pro elastickou složku napětí platí obecný Hookeův zákon

$$\sigma = D : \varepsilon_e , \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{D}$  je tenzor elastických konstant. V rovnici (3.3) je také symbol „:“, jež značí zúžení tenzoru, pro vysvětlení je v rovnici (3.4) uvedeno Einsteinovo sumační pravidlo, na kterém je vysvětleno, jak zúžení tenzoru funguje

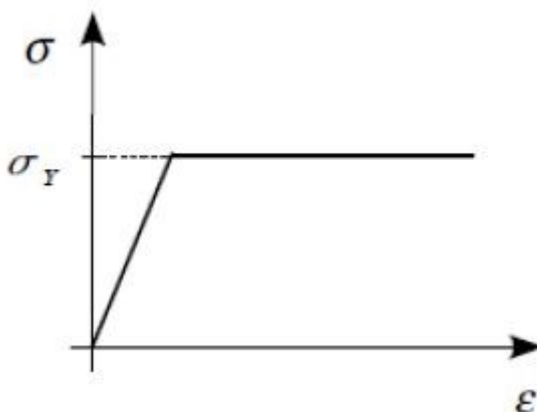
$$d_{ij} = (\mathbf{B} : \mathbf{c})_{ij} = B_{ijkl} \cdot c_{kl} . \quad (3.4)$$

### 3.2 Podmínka plasticity

Při jednoosém namáhání dochází k překročení meze kluzu, tudíž vznikají nevratné deformace. Pokud je uvažován ideálně elasto-plastický materiál, musí funkce plasticity splňovat podmínku plasticity

$$f = \sigma_{1norm} - \sigma_Y = 0 , \quad (3.5)$$

kde  $\sigma_Y$  je mez kluzu v tahu. Velikost normálového napětí tedy nikdy nepřekročí hodnotu meze kluzu (Obr. 11). Dochází k tečení materiálu ve směru tahového napětí.



Obr. 11 – Podmínka plasticity pro ideálně elasto-plastický materiál (bez zpevnění). [3]

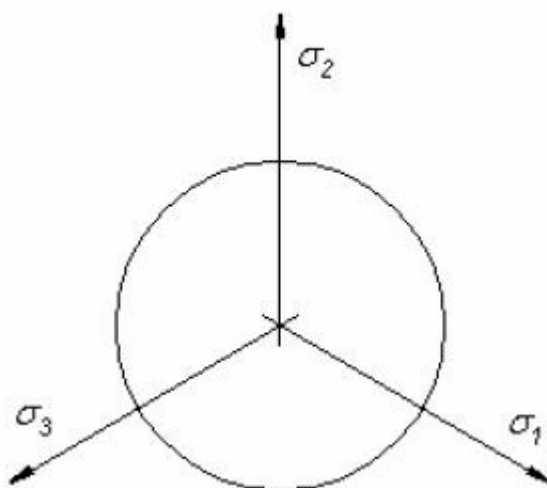
Daleko složitější řešení nastává v případě obecné napjatosti. Podmínka plasticity se může při jednoosém napěťovém stavu přepsat do obecného tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y = 0 , \quad (3.6)$$

kde  $f(\boldsymbol{\sigma})$  je funkce plasticity, která se mění se složkami tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ , je tedy závislá na tomto tenzoru. Pokud je brán v úvahu ideálně elasticko-plastický materiál, lze očekávat, že se funkce plasticity nebude měnit. Může se zde tedy použít Von Misesova podmínka, která platí pro houževnaté materiály. Tato podmínka vychází z intenzity napětí, a lze ji vyjádřit v závislosti na hlavních napětích

$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/2} . \quad (3.7)$$

V prostoru hlavních napětí lze zobrazit plochu plasticity. V případě Von Misesovy podmínky je plocha plasticity ve tvaru válce. Tato plocha je ale často zobrazovaná jako průmět válce do deviatorové roviny, v které platí, že  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = konst.$  Důvodem je zanedbatelný vliv středního napětí. Průmětem válcové plochy je kružnice a je zobrazena na Obr.12.



Obr.12 – Průmět válcové plochy do deviatorové roviny dle podmínky Von Mises. [9]

### 3.3 Pravidlo normality

Jak se bude měnit plocha plasticity při různém zatěžování udává pravidlo plasticity. U ideálně elasticko-plastického materiálu zůstává plocha plasticity neměnná. U materiálů se zpevněním plocha plasticity nemusí být neměnná, může se měnit jak její velikost, tak poloha plochy plasticity, či její tvar [3].

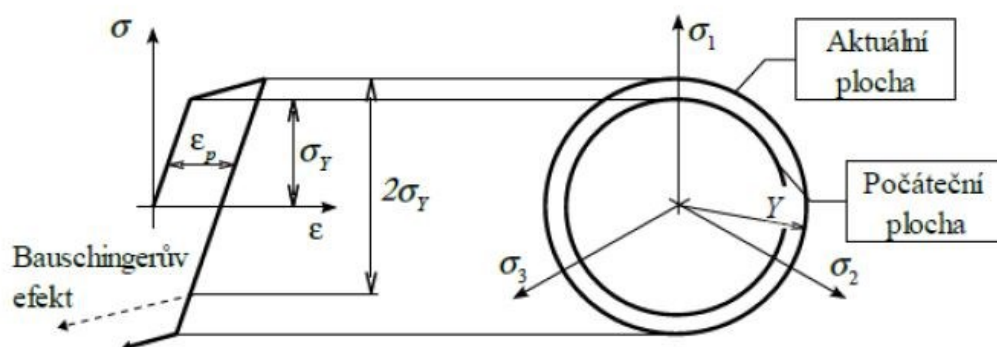
Obecně se pravidla zpevnění mohou rozdělit na tři druhy:

- Izotropní zpevnění
- Kinematické zpevnění
- Kombinované zpevnění
- 

#### 3.3.1 Izotropní zpevnění

U izotropního zpevnění dochází ke zvětšení plochy plasticity ve všech směrech rovnoměrně, přičemž střed průmětu plochy plasticity zůstává stále na stejném místě,

v počátku souřadnicového systému. U modelů plasticity s izotropním zpevněním je nevýhoda v tom, že nejsou schopny zachytit Bauschingerův efekt, což je patrné z Obr.13. Na tomtéž obrázku lze pozorovat průběh deformační odezvy. Pokud dojde při jednosměrném namáhání k překročení meze kluzu  $\sigma_Y$ , plocha plasticity se rozšíří, následně dojde k odlehčení až do místa, které má velikost maximální hodnoty z kladné tahové větve právě s opačným znaménkem.



Obr.13 – Model izotropního zpevnění. [10]

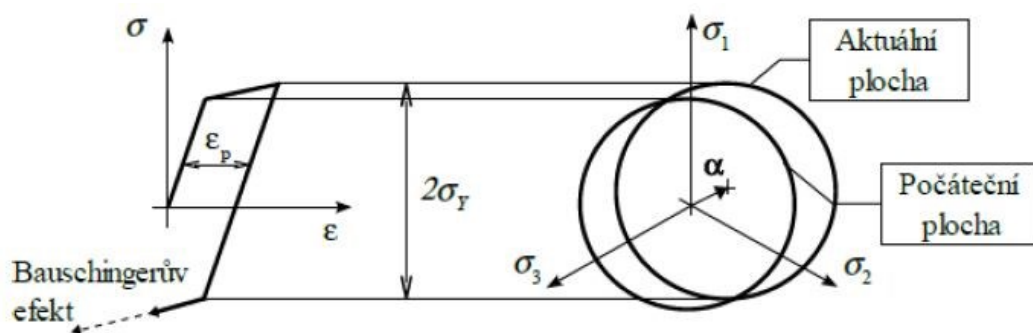
Lze tedy vidět, že řídicí proměnnou izotropního modelu plasticity je poloměr průmětu plochy plasticity  $Y$ . Podmínku plasticity pro izotropní zpevnění lze psát ve tvaru

$$f(\sigma, Y) = \bar{f}(\sigma) - Y = 0. \quad (3.8)$$

Tento typ modelů se nejčastěji využívá při simulaci monotónního namáhání. Zpravidla se používá při modelování tváření. Nedoporučuje se je ale používat pro případ cyklického zatěžování, nepopisují správně chování tvárných materiálů (Bauschingerův efekt).

### 3.3.2 Kinematické zpevnění

Druhým případem zpevnění je kinematické zpevnění. To je charakteristické tím, že při zpevnění nedochází ke zvětšení plochy plasticity, ale dochází k posunu jejího počátku. Je zde tedy zaveden pojem kinematický tenzor napětí  $\alpha$ . Ten udává posunutí středu aktuální plochy plasticity vzhledem k počátku. Tyto modely zpevnění jsou schopny dobře popsat Bauschingerův efekt (Obr.14). Pokud je vzorek zatěžován střídavým jednoosým zatěžováním, výsledná odezva je charakterizována uzavřenou hysterezní smyčkou.



Obr.14 – Model kinematického zpevnění. [10]

Podmínka plasticity pro kinematické zpevnění je popsána rovnicí

$$f(\sigma, \alpha) = \bar{f}(\sigma - \alpha) - \sigma_Y = 0. \quad (3.9)$$

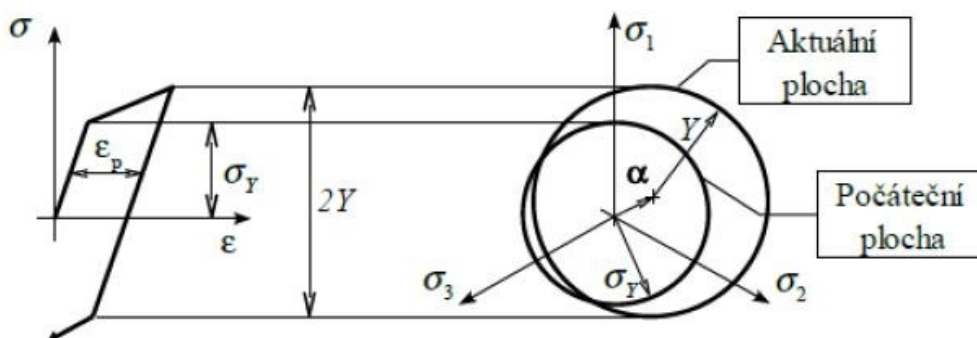
Tento model zpevnění se využívá pro popsání skutečnosti, kdy u materiálů je mez kluzu v cyklické deformační křivce a mez kluzu ve statické deformační křivce podobná. Dále se využívá pro modelování chování při cyklickém proporcionálním namáhání.

### 3.3.3 Kombinované zpevnění

Tento model zpevnění je složen z předcházejících dvou zpevnění, izotropního a kinematického. Tohoto modelu se využívá u materiálů, které mají různou mez kluzu ve statické a cyklické deformační křivce. Podmínka plasticity pro kombinované zpevnění je popsána tvarem

$$f(\sigma, \alpha, Y) = \bar{f}(\sigma - \alpha) - Y = 0. \quad (3.10)$$

Tento model věrohodněji odpovídá experimentálním měřením. Mění se jak velikost průměru původní plochy plasticity, tak dochází i k posunu středu původní plochy plasticity. Model je ukázán na Obr.15.



Obr.15 – Kombinovaný model zpevnění [10]

### 3.4 Zátěžná kritéria a podmínka konzistence

Jestliže je uvažován model plasticity se zpevněním, plocha plasticity se může zvětšovat, popřípadě se může posunout střed této plochy. Může dojít i ke kombinaci těchto dvou možností. Aktuální plocha plasticity se tedy vyvíjí a je často nazývána plochou zatěžování. Funkce plasticity se potom bude nazývat funkce zatěžování

$$f = f(\sigma, \alpha, Y). \quad (3.11)$$

Z rovnice (3.11) lze vyčíst to, co již bylo podrobněji rozebráno o kapitulu dříve, že funkce zatěžování je závislá na velikosti plochy zatěžování a velikosti posunu středu od původní plochy. V obecném případě musí být přírůstek funkce zatěžování (3.11) vyjádřen totálním diferenciálem

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} : d\alpha + \frac{\partial f}{\partial Y} : dY, \quad (3.12)$$

kde člen  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  zde reprezentuje směr normály k ploše zatěžování, viz Obr.16. V daném okamžiku je plocha plasticity neměnná, platí tedy podmínka konzistence

$$df = 0. \quad (3.13)$$

Na Obr.16 lze také vidět všechny tři zátěžné stavy, které mohou nastat. Jsou to:

#### 1. Zatěžování

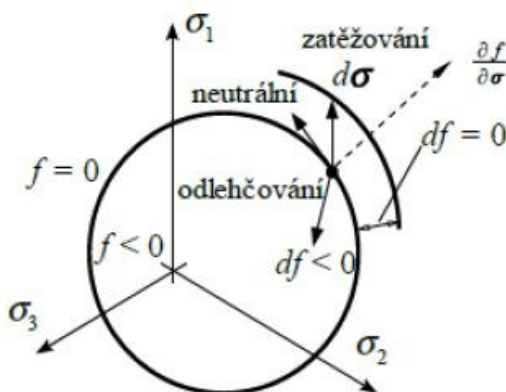
- Platí pokud  $f = 0$ ,  $df = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma > 0$ .

#### 2. Neutrální zatěžování

- To nastává za předpokladu, kdy  $f = 0$ ,  $df = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = 0$ .

#### 3. Odlehčování

- Platí za předpokladu  $f = 0$ ,  $df < 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0$ .



Obr.16 – Tři zátěžovací kritéria. [3]



Prvnímu stavu se říká aktivní zatížení, ostatním dvěma se říká pasivní zatížení.

### 3.5 Pragerův model

Lze se na něj dívat jako na nejjednodušší kinematický model zpevnění. Zavedl ho Prager v roce 1952 [11]. Ostatně jako teorie k většině napětově-deformačních charakteristik za cyklického namáhání se liší pouze v rovnici pro změnu kinematického tenzoru napětí  $\alpha$  a izotropní proměnné  $Y$ . Pragerovo pravidlo popisuje rovnice

$$d\alpha = \frac{2}{3} C \cdot d\varepsilon_p, \quad (3.14)$$

kde  $C$  je parametr zpevnění. Pragerův model spolehlivě dokáže zachytit Bauschingerův efekt, vede ale pouze k lineárním napětově-deformačním charakteristikám. Chování tvárných materiálů při cyklickém namáhání není ovšem lineární, proto se hledal způsob, jak zavést nelineární chování do modelů zpevnění. Pragerův model je v Ansysu označen jako BKIN.

### 3.6 Nelineární kinematické modely zpevnění

Kinematické modely se mohou rozdělit podle způsobu zavedení nelinearity na:

#### 1. Vícevrstvé modely

- První vědeckou prací v oblasti vícevrstvých modelů vypracoval Besseling v r. 1958 [12]. Uvažoval popsání chování materiálu tak, že jej rozdělil na subobjemy, které měly rozdílnou mez kluzu, ale stejně velkou celkovou deformaci. Všechny části jsou považovány za ideálně elasticko-plastické, a mají jednoduchou napětově-deformační odezvu. Dohromady mohou charakterizovat chování materiálu komplexně. Tento model je v Ansysu označen jako MKIN.

#### 2. Modely řešené diferenciálními rovnicemi

- Tyto jednoploché modely jsou nejvíce pokrokovou skupinou v oblasti plasticity, navazují na Pragerův model a jsou nejvíce zavedeny v softwarech MKP.

### 3. Víceploché modely plasticity

- Šlo zde o zavedení více parametrů zpevnění. Nejznámější model je Mrozův [13].

### 4. Modely se dvěma plochami plasticity

- Hlavní myšlenkou bylo zavedení plochy zatěžování a limitní plochy [14]. Parametr zpevnění je závislý na vzdálenosti bodu, který leží na ploše zatěžování a bodu, který leží na limitní ploše. Oba tyto body mají stejný směr normály. Tyto dvě plochy se nesmí překřížit. Modely se dvěma plochami plasticity dobře popisují neproporcionální zatěžování a ratcheting.

### 5. Endochronní teorie

- „Tato teorie se vyznačuje hypotézou, že současný napěťový stav v materiálu je lineárním funkcí celého deformačního děje, a není nutné u ní zavedení ploch plasticity.“ [3]

## 3.7 Modely v MKP software

V dnešní době všechny MKP software poskytují možnost řešení viscoplasticity u nelineárních modelů zpevnění. Na Obr.17 je ukázáno, jaké modely jsou implementovány v nejpoužívanějších MKP softwarech, řešící cyklickou plasticitu.

*Tab.1 – Nejpoužívanější MKP softwary a modely cyklické plasticity zakomponované v nich. [3]*

Kinematické zpevnění	Ansys	Abaqus	MSC. Marc	MSC. Nastran
Bilineární	x (Prager)	x	x (Ziegler) [15]	x (Ziegler)
Multilineární	x (Besseling)	-	-	-
Armstrong-Frederic	x	x	x	x
Chaboche	x (Mmax = 5)	x (Mmax = 3)	-	-

### 3.8 Armstrong-Fredericův model

S velmi důležitým poznatkem přišli vědci Armstrong a Frederic v roce 1966 [16]. K původnímu modelu zpevnění Pragera byla přidána paměťová složka. Pro větší přehlednost budou rovnice pokračovat ve vektorovém zápisu.

$$\{d\alpha\} = \frac{2}{3}C \cdot \{d\varepsilon_P\} - \gamma\{\alpha\}dp. \quad (3.15)$$

V této rovnici  $C$  a  $\gamma$  představují materiálové konstanty. Pro jednoosé namáhání se může psát

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}d\alpha_x \\ -\frac{1}{3}d\alpha_x \\ -\frac{1}{3}d\alpha_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}C \begin{pmatrix} d\varepsilon_{Px} \\ -\mu d\varepsilon_{Px} \\ -\mu d\varepsilon_{Px} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\alpha_x \\ -\frac{1}{3}\alpha_x \\ -\frac{1}{3}\alpha_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dp, \quad (3.16)$$

kde  $\mu$  pro plastické deformace činí 0,5. Zde jsou 3 totožné rovnice. Vybere se například 1.řádek

$$\frac{2}{3}d\alpha_x = \frac{2}{3}C \cdot d\varepsilon_{Px} - \gamma \cdot \frac{2}{3}\alpha_x \cdot dp. \quad (3.17)$$

Poté se odstraní zbytečné konstanty v podobě zlomků

$$d\alpha_x = C \cdot d\varepsilon_{Px} - \gamma\alpha_x \cdot dp. \quad (3.18)$$

Pro jednoosou napjatost platí

$$dp = |d\varepsilon_{Px}| \quad (3.19)$$

$$dp = \psi \cdot d\varepsilon_{Px}.$$

Dosazením (3.19) do vztahu (3.18) vznikne vztah

$$d\alpha_x = C \cdot d\varepsilon_{Px} - \gamma\alpha_x \cdot \psi \cdot d\varepsilon_{Px}. \quad (3.20)$$

Poté je nutné vztah (3.20) upravit separací proměnných pro následnou integraci

$$\frac{d\alpha_x}{C - \gamma\alpha_x \cdot \psi} = d\varepsilon_{Px}. \quad (3.21)$$

Po integraci a úpravě rovnice je získán vztah pro kinematické napětí  $\alpha_x$ , tedy

$$\alpha_x = \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \left( \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \alpha_{x0} \right) \cdot e^{-\psi \cdot \gamma (\varepsilon_{Px} - \varepsilon_{P0})}. \quad (3.22)$$

Dosazením do podmínky plasticity (3.23) bude platit, že

$$\sigma_x = \psi \cdot \sigma_Y + \alpha_x \quad (3.23)$$

$$\sigma_x = \psi \cdot \sigma_Y + \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \left( \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \alpha_{x0} \right) \cdot e^{-\psi \cdot \gamma (\varepsilon_{Px} - \varepsilon_{P0})}. \quad (3.24)$$

S použitím zjednodušení, kdy pro tah platí že  $\psi = 1$  a nulovými počátečními podmínkami, tj.  $\alpha_{x0} = \varepsilon_{P0} = 0$  se vztah (3.24) zjednoduší na rovnici

$$\sigma_x = \sigma_Y + \frac{C}{\gamma} (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{Px}}). \quad (3.25)$$

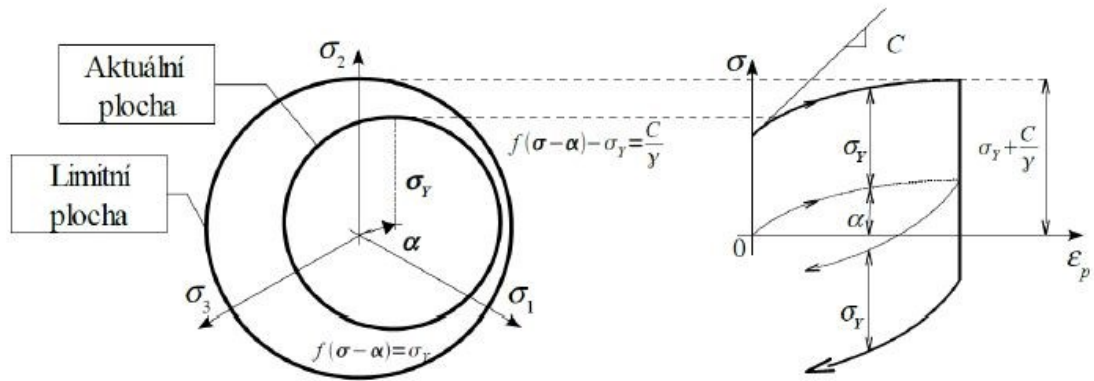
Následně je popsán význam parametrů  $C$  a  $\gamma$ . Bude zřetelné, jak ovlivňují napěťově-deformační chování

$$\lim_{\varepsilon_P \rightarrow 0} \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_{Px}} = C e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{Px}} = C. \quad (3.26)$$

Z rovnice (3.27) lze vyčíst, že parametr  $C$  určuje sklon tečny k deformační křivce na mezi kluzu  $\sigma_Y$ . Pro nekonečně velkou plastickou deformaci, tj.  $\varepsilon_P \rightarrow \infty$  lze zjistit maximální hodnotu napětí u jedno-osého namáhání při A-F modelu

$$\lim_{\varepsilon_P \rightarrow \infty} \sigma_Y + \frac{C}{\gamma} (1 - e^{-\gamma \cdot \varepsilon_{Px}}) = \sigma_Y + \frac{C}{\gamma}. \quad (3.27)$$

Funkce (3.25) je rostoucí. Parametr  $\gamma$  má vliv na rychlost, kterou se napětí blíží k limitnímu napětí. Hodnotu minimálního napětí lze získat obdobně jako pro maximální napětí a bude se rovnat  $\sigma_{min} = -\sigma_Y - \frac{C}{\gamma}$ . Pokud je zobrazen A-F model v prostoru hlavních napětí, bude zde kromě plochy zatěžování také limitní plocha. Na Obr.17 lze také vidět průběh vzniku hysterezní smyčky při jednoosém zatížení. A-F model dokáže zachytit Bauschingerův efekt. Správně také znázorňuje tvar hysterezní smyčky při malém rozkmitu plastické deformace. Pro větší amplitudy deformace se tento model spíše nehodí. Identifikace materiálových parametrů není u A-F modelu těžká, to je velká výhoda tohoto modelu.



Obr.17 – A-F model. [3]

### 3.8.1 Kalibrace Armstrong-Fredericova modelu

V této kapitole bude uveden postup získání rovnice pro cyklickou deformační křivku použitím vztahu (3.22). Pro připomenutí vztah pro kinematické napětí  $\alpha_x$  (3.22) vypadá následovně

$$\alpha_x = \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \left( \psi \cdot \frac{C}{\gamma} - \alpha_{x0} \right) \cdot e^{-\psi \gamma (\varepsilon_{Px} - \varepsilon_{P0})} \quad (3.27)$$

z tohoto vztahu se vytkne mínus ze závorky, a dojde ke zjednodušení vztahu tím, že se rozeptíže pro tahovou větev hysterezní smyčky, kdy  $\psi = 1$ , tedy

$$\alpha_{max} = \frac{C}{\gamma} + \left( \alpha_{min} - \frac{C}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma (\varepsilon_p - \varepsilon_{ap})}, \quad (3.28)$$

dále se může napsat vztah i pro zápornou větev, tj. tlaková větev ( $\psi = -1$ )

$$\alpha_{min} = -\frac{C}{\gamma} + \left( \alpha_{max} + \frac{C}{\gamma} \right) \cdot e^{\gamma (\varepsilon_p - \varepsilon_{ap})}. \quad (3.29)$$

Dosazením vztahu (3.28) do vztahu (3.29) a po matematických úpravách vznikne rovnice pro amplitudu napětí  $\sigma_a$

$$\sigma_a = \sigma_Y + \frac{C}{\gamma} \tanh(\gamma \cdot \varepsilon_{ap}). \quad (3.30)$$

Ve vztazích pro kalibraci A-F modelu  $\alpha_{min}$  je minimální hodnota kinematického napětí,  $\alpha_{max}$  je maximální hodnota kinematického napětí.  $\sigma_Y$  je cyklická mez kluzu. Další možností, jak provést kalibraci A-F modelu a stanovit parametry  $\sigma_Y, C, \gamma$  je z široké hysterezní smyčky. Může se tedy dle (3.27) pro tuto smyčku psát rovnice

$$\alpha_x = \psi \frac{C}{\gamma} + \left( \alpha_0 - \psi \frac{C}{\gamma} \right) \cdot e^{-\psi \gamma (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})}. \quad (3.31)$$

Bude se uvažovat horní větev, kdy  $\psi = 1$ , dále potom  $\alpha_0 = -\frac{C}{\gamma}$  a  $\varepsilon_{p0} = -\varepsilon_{ap}$

$$\alpha_x = \frac{C}{\gamma} + \left( -\frac{C}{\gamma} - \frac{C}{\gamma} \right) \cdot e^{-\gamma (\varepsilon_p - (-\varepsilon_{ap}))}. \quad (3.32)$$

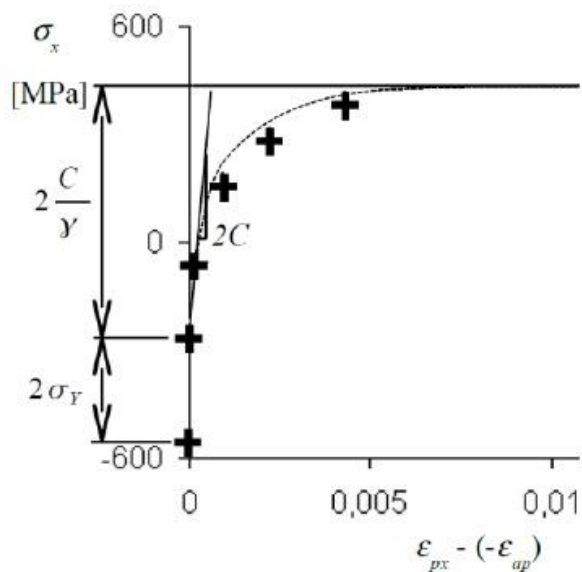
Zde po vytknutí  $\frac{C}{\gamma}$  vznikne

$$\alpha_x = \frac{C}{\gamma} [1 + (-1 - 1) \cdot e^{-\gamma (\varepsilon_p - (-\varepsilon_{ap}))}]. \quad (3.33)$$

Dosazením do podmínky plasticity se získá vztah

$$\sigma_x = \sigma_Y + \frac{C}{\gamma} (1 - 2e^{-\gamma (\varepsilon_p - (-\varepsilon_{ap}))}). \quad (3.34)$$

Na Obr. 18 lze vidět počáteční volby parametrů při kalibraci A-F modelu z široké hysterezní smyčky.



Obr.18 - Kalibrace A-F modelu. [17]

### 3.8.2 A-F model s kombinovaným zpevněním

Superponováním nelineárního izotropního pravidla s využitím kombinovaného modelu zpevnění je možné dosáhnout zachycení cyklického zpevňování/změkčování. Základní rovnice pro tuto superpozici je uvedena ve vztahu

$$Y(p) = \sigma_Y + R(p), \quad (3.35)$$

kde  $R$  reprezentuje izotropní proměnnou. Změna této proměnné je popsána rovnicí

$$dR = b(R_\infty - R)dp, \quad (3.36)$$

kde  $dp$  je přírůstek akumulované plastické deformace,  $R_\infty$  a  $b$  jsou materiálové konstanty. Konstanta  $b$  určuje, jak rychle se bude stabilizovat hysterezní smyčka, pokud je řízená zkouška s konstantním rozkmitem deformace. Velikost této konstanty se dá stanovit ze vztahu

$$R = R_\infty(1 - e^{-b\varepsilon_p}). \quad (3.37)$$

Vztah (3.37) vznikne po integraci vztahu (3.36).

### 3.9 Chabocheův model

Chaboche vylepšil Armstrong-Fredericův model tím, že sestavil kinematické napětí z  $M$  částí. Odstranil tak velkou nevýhodu A-F modelu. Tento model byl publikován v r. 1979 [18]. Model je popsán následující rovnicí

$$\{\alpha\} = \sum_{i=1}^M \{\alpha_i\}, \quad (3.38)$$

přičemž pro každou část kinematického napětí se bere v úvahu rovnice Armstrong-Frederica

$$\{d\alpha_i\} = \frac{2}{3} C_i \cdot \{d\varepsilon_p\} - \gamma_i \{\alpha_i\} dp. \quad (3.39)$$

$C_i$  a  $\gamma_i$  zde opět reprezentují materiálové parametry. Vzhledem k analogii, spojené s A-F modelem, jsou podobné v Chabocheově modelu i vztahy pro:

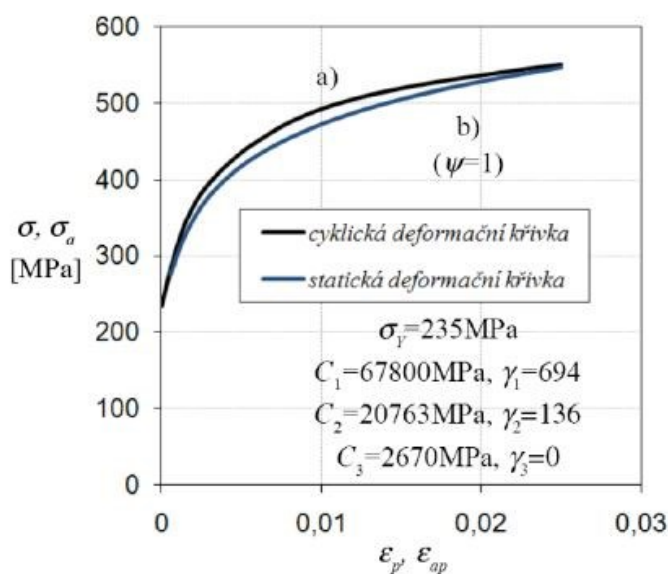
#### 1. Statickou deformační křivku

$$\sigma_x = \psi \cdot \sigma_Y + \sum_{i=1}^M \left[ \psi \cdot \frac{C_i}{\gamma_i} - \left( \psi \cdot \frac{C_i}{\gamma_i} - \alpha_{x0i} \right) \cdot e^{-\psi \gamma_i (\varepsilon_{px} - \varepsilon_{p0})} \right]. \quad (3.40)$$

#### 2. Cyklickou deformační křivku

$$\sigma_a = \sigma_Y + \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{\gamma_i} \tanh(\gamma_i \cdot \varepsilon_{ap}). \quad (3.41)$$

Na Obr.19 lze vidět, jaký rozdíl je mezi cyklickou deformační křivkou a statickou deformační křivkou. Porovnání je provedeno pro Chabocheův model s třemi kinematickými částmi ( $M=3$ ).



Obr.19 – Rozdíl mezi statickou a cyklickou deformační křivkou. [3]

### 3.9.1 Kalibrace Chabocheova modelu

Vztah pro kinematický tenzor  $\alpha$  při jednoosém namáhání se může napsat ve vektorovém tvaru

$$\{\alpha_i\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \\ \alpha_{zi} \\ \alpha_{xyi} \\ \alpha_{yzi} \\ \alpha_{xzi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Při uvažování pouze deviatorové části (3.42), kdy

$$\alpha_s = \frac{\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z}{3} \quad (3.43)$$

je střední kinematické napětí vznikne vztah následující

$$\begin{aligned} \{\alpha_i\} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \\ \alpha_{zi} \\ \alpha_{xyi} \\ \alpha_{yzi} \\ \alpha_{xzi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xi} - \alpha_{si} \\ \alpha_{yi} - \alpha_{si} \\ \alpha_{zi} - \alpha_{si} \\ \alpha_{xyi} \\ \alpha_{yzi} \\ \alpha_{xzi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xi} - \frac{\alpha_{xi}}{3} \\ 0 - \frac{\alpha_{xi}}{3} \\ 0 - \frac{\alpha_{xi}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{2\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1\alpha_{xi}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Armstrong-Fredericovu rovnici (3.39) lze zapsat ve vektorovém zápisu

$$\begin{Bmatrix} \frac{2d\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1d\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1d\alpha_{xi}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} C_i \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{Px} \\ -\mu \cdot d\varepsilon_{Px} \\ -\mu \cdot d\varepsilon_{Px} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \psi \gamma_i \begin{Bmatrix} \frac{2\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1\alpha_{xi}}{3} \\ -\frac{1\alpha_{xi}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dp, \quad (3.45)$$

kde  $\mu$  pro plastické deformace činí 0,5. Opět se získají tři stejné rovnice, napíše se hned první. Dojde zde k úpravám a vznikne tento tvar diferenciální rovnice



$$d\alpha_{xi} = C_i d\varepsilon_{Px} - \psi \gamma_i \alpha_{xi} dp. \quad (3.46)$$

Využijí se zde podmínky, že  $dp = |d\varepsilon_{Px}|$ . Poté se může rovnice (3.46) přepsat na tvar

$$d\alpha_{xi} = C_i d\varepsilon_{Px} - \psi \gamma_i \alpha_{xi} d\varepsilon_{Px}. \quad (3.47)$$

Tuto rovnici lze separovat a připravit si ji tak po následnou integraci, aby vzniklo hledané řešení

$$\int_{\varepsilon_{P0}}^{\varepsilon_P} d\varepsilon_{Px} = \int_{\alpha_{x0i}}^{\alpha_{xi}} \frac{d\alpha_{xi}}{C_i - \psi \gamma_i \alpha_{xi}}. \quad (3.48)$$

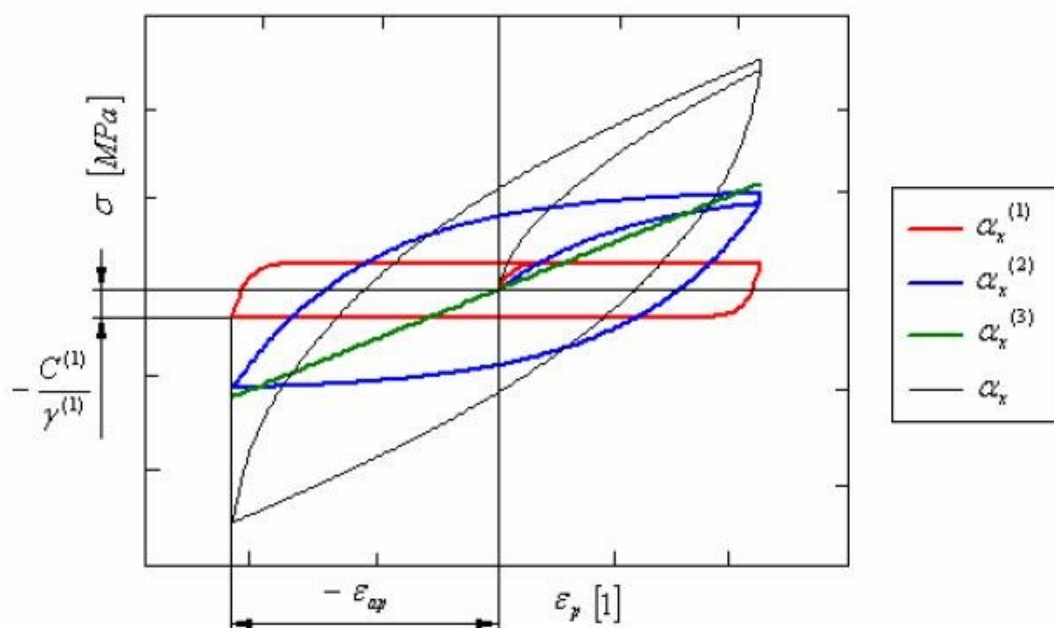
Řešení této rovnice bude vypadat následovně

$$\alpha_x = \sum_{i=1}^M \left[ \psi \cdot \frac{C_i}{\gamma_i} - \left( \psi \cdot \frac{C_i}{\gamma_i} - \alpha_{x0i} \right) \cdot e^{-\psi \gamma_i (\varepsilon_{Px} - \varepsilon_{P0})} \right]. \quad (3.49)$$

S využitím podmínek, že  $\alpha_{x0i} = -\frac{C_i}{\gamma_i}$ ,  $\varepsilon_{P0} = \varepsilon_{ap}$  a pro kladnou tahovou větev, kdy  $\psi = 1$  se může výraz (3.49) zjednodušit a dále dosadit do podmínky plasticity (3.23) a získá se tento vztah

$$\sigma_x = \sigma_Y + \sum_{i=1}^M \frac{C_i}{\gamma_i} (1 - 2e^{-\gamma_i (\varepsilon_P - (-\varepsilon_{ap}))}). \quad (3.50)$$

Na Obr. 20 lze vidět grafické znázornění kinematických částí v Chabocheově modelu, konkrétně pro tři kinematické části (M=3).



Obr. 20 – Zobrazení kinematických částí Chabocheova modelu pro M=3. [9]

## 4 Vyhodnocení experimentálních měření

Cílem experimentů bylo kromě životnosti vyhodnotit napěťově-deformační charakteristiky nerezové oceli 316L při proporcionálním namáhání. Zkouška byla řízena s konstantní amplitudou celkové deformace, jednalo se tedy o tvrdé zatěžování. Vzorky byly zkoušeny v Laboratoři mechanických vlastností moderních vlastností a defektoskopie Katedry aplikované mechaniky Fakulty strojní VŠB-TUO. Z těchto experimentů, kdy se vzorek upne na testovací stroj a zatěžuje se cyklicky střídavě v tahu-tlaku, lze získat data, která jsou potřebná pro další vyhodnocování materiálových parametrů a napěťově-deformačních charakteristik zkoumaného materiálu. Mezi taková data patří většinou síla, kterou působí stroj na vzorek, počet cyklů do porušení vzorku apod. Před samotným experimentem se také změří průměr vzorku s plným průřezem, jehož výkres je uveden v příloze a nastaví extenzometr do správné pozice na zkušební části vzorku. K samotnému zpracování dat musí uživatel provést ve vhodném software, v mém případě v MS Excel. Nejprve byla přepočtena primárně získaná data přepočítána na veličiny, s kterými se dále bude pracovat.

### 4.1 Tah/tlak

První je nutné spočítat poměrnou deformaci vzorku, protože výsledek z experimentálního měření nám dá pouze hodnotu prodloužení zkušební části měřenou extenzometrem, tudíž se přepočte podle vzorce

$$\varepsilon = \frac{\text{posuv}}{\text{délka zkušební měřené části}} \quad (4.1)$$

Další hodnotou, kterou pro vyhodnocení napěťově-deformační charakteristiky je nutné znát je napětí. Tomuto napětí se říká smluvní. Při jednoosém namáhání se vypočte dle vztahu

$$\sigma_{sml} = \frac{F}{S}, \quad (4.2)$$

kde  $F$  je síla, kterou stroj působí na zadaný vzorek, ta je samozřejmě proměnná v čase, a  $S$  je plocha průřezu zkušební části vzorku. Zpravidla se přepočítává smluvní napětí na napětí skutečné, a to dle vztahu

$$\sigma_{skut} = \sigma_{sml} \cdot (1 + \varepsilon). \quad (4.3)$$

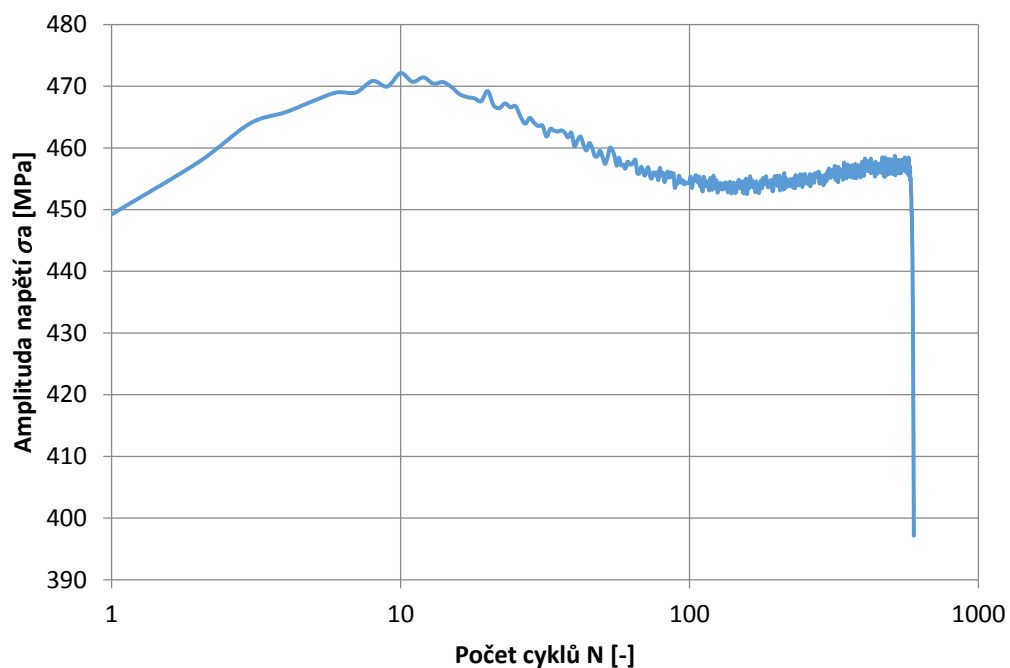
Hodnoty napětí skutečného a napětí smluvního jsou si velice podobné, díky malé deformaci vzorku u únavových testů. Dále se spočte logaritmická deformace, a to podle vztahu

$$\varepsilon_{log} = \ln(1 + \varepsilon) . \quad (4.4)$$

Nyní už je vše připraveno pro to, aby mohla být vyhodnocena napětově-deformační charakteristika z dat, získaných z experimentálního měření. Jelikož ale do přetržení vzorku je potřeba mnohdy i několik tisíc cyklů, vyvstává otázka „Z jakého cyklu právě vyhodnocovat danou charakteristiku?“ Materiál nerezová ocel 316L vykazuje zpočátku testu zpevňování, potom se na několik cyklů ustálí a až do poruchy vzorku vykazuje změkčování. Bylo by tedy vhodné, aby se tyto charakteristiky zjistily právě v okamžiku, kdy materiál ani nezpevňuje ale ani nezměkčuje. Na to je nutné si připravit další výpočty a graf. Z experimentálních dat lze také zjistit vrcholy napětí v daném cyklu, jak horní, tak spodní, těch se zde využije. Právě v těchto vrcholech lze zjistit hodnoty napětí, tzn. je vyhodnoceno a vypočítáno maximální a minimální napětí v každém cyklu. Dále z měření lze zjistit posuvy v horních a dolních vrcholech v každém cyklu, tzn. dle vztahu (4.1) se přepočte na maximální a minimální deformaci v těchto vrcholech. Potom už stačí jen dopočíst amplitudu napětí, pro kterou platí vzorec

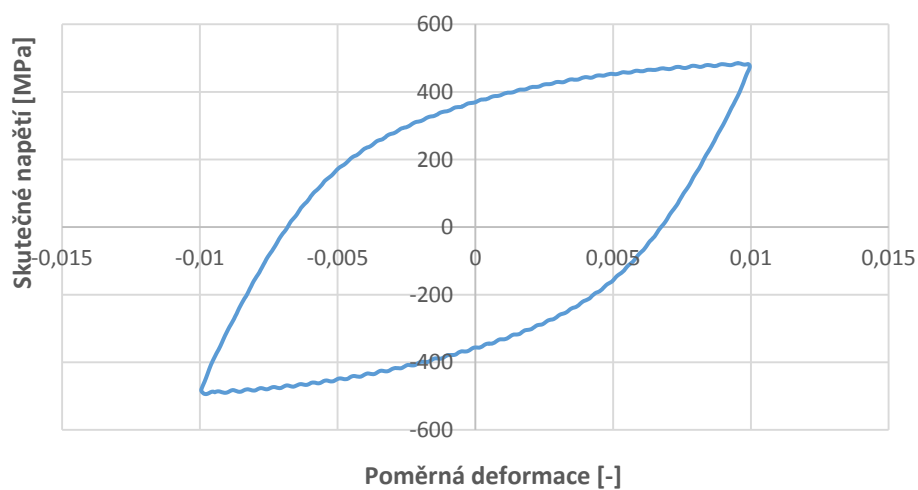
$$\sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_d}{2} , \quad (4.5)$$

kde  $\sigma_h$  je horní napětí v každém vrcholu cyklu a  $\sigma_d$  je dolní napětí v tomtéž vrcholu. A právě závislost amplitudy napětí  $\sigma_a$  na celkovém počtu cyklů  $N$  udává, kdy daný vzorek zpevňuje, kdy nezpevňuje a ani nezměkčuje, a kdy naopak změkčuje. To lze vidět na Grafu 1. Pro ukázkou zde byl vybrán vzorek s konstantní řízenou amplitudou deformace  $\varepsilon = 0,01$ . Lze zde pozorovat, že v počátečních cyklech materiál zpevňuje, potom v okolí 10. cyklu ani nezpevňuje a ani nezměkčuje, odtud právě je dobré vyhodnocovat napětově-deformační charakteristiky, a poté začíná materiál změkčovat.



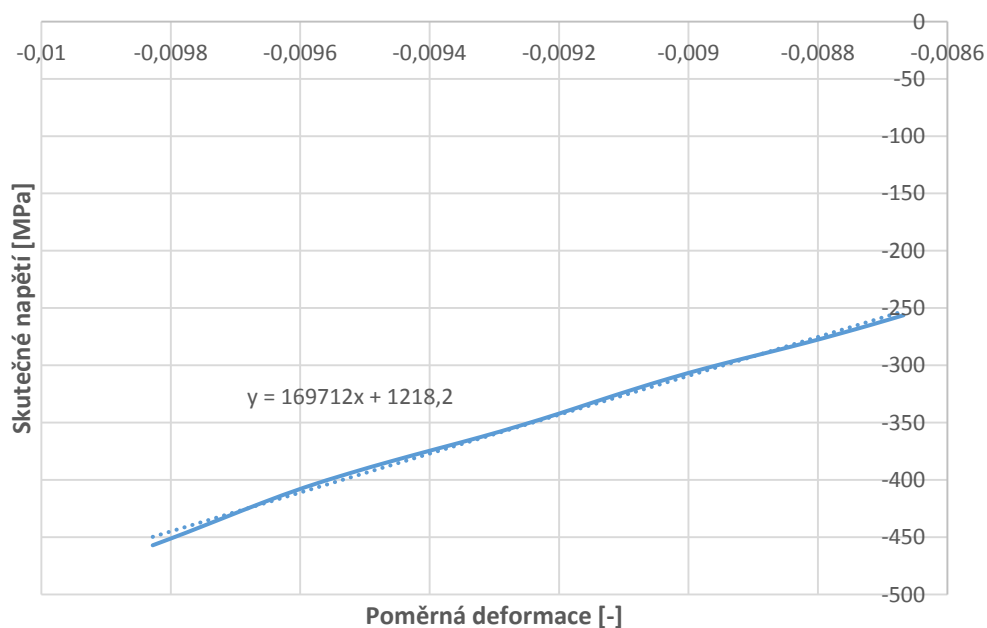
*Graf 1 – Závislost amplitudy napětí na počtu cyklů u vzorku s konstantní řízenou amplitudou deformace 0,01.*

Počet cyklů je zde uveden v logaritmickém měřítku pro větší přehlednost. Z grafu je patrné, při jakém počtu cyklů vyhodnocovat napětově-deformační charakteristiky. Jak už název sám napovídá, figuruje zde napětí závislé na deformaci. Očekávaným grafem je hysterezní smyčka. Pro ukázkou je zde opět použit vzorek s řízenou konstantní amplitudou deformace 0,01. Na Grafu 2 lze tedy vidět napětově-deformační charakteristiku v podobě hysterezní smyčky, vyhodnocenou pro jeden cyklus



*Graf 2 – Napětově-deformační charakteristika vzorku s konstantní amplitudou deformace 1 %.*

Z tohoto grafu ustálené hysterezní smyčky, lze vyčíst, že deformace opravdu nepřesáhne hodnotu, již je řízená, tzn. 0,01. Maximální hodnota napětí je přirozeně ve vrcholu kladné (tahové) větve a činí  $\sigma_{max} = 485 \text{ MPa}$ . Minimální hodnota napětí je ve vrcholu záporné (tlakové) větve a má hodnotu  $\sigma_{min} = -494 \text{ MPa}$ . Pro zjištění materiálového parametru E, neboli dynamického modulu pružnosti v tahu, se zde využije právě začátek tahové větve této hysterezní smyčky. Proloží se vybrané body přímkou (lineární regrese) a nechá se vypsát rovnice této přímky, z které lze zjistit dynamický modul pružnosti v tahu. Určení toto dynamického modulu pružnosti je uvedeno v Grafu 3.

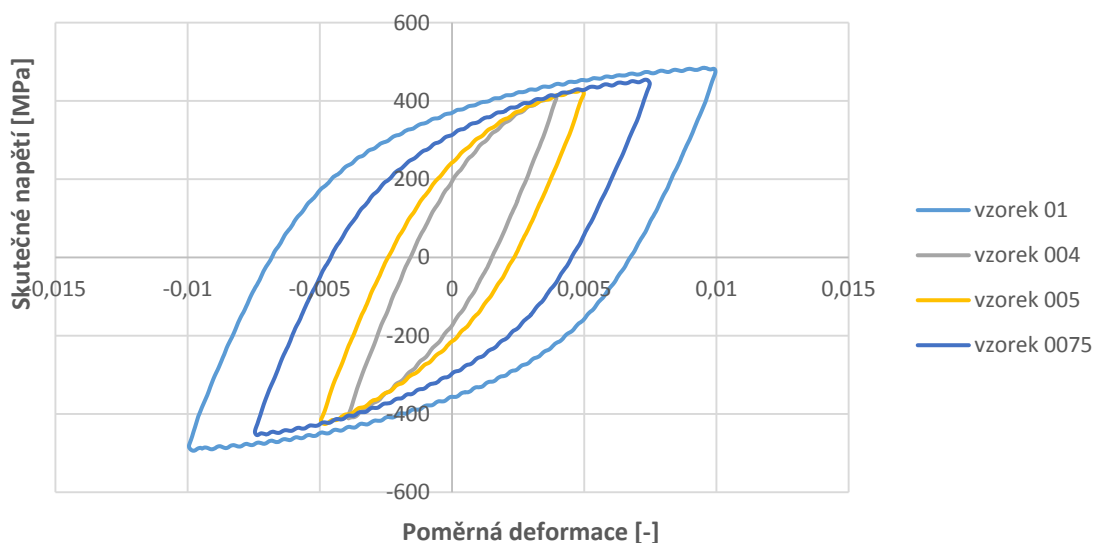


*Graf 3 – Určení dynamického modulu pružnosti z kladné tahové větve hysterezní smyčky.*

Přímka byla proložena dvaceti body z počátku kladné větve hysterezní smyčky, kde se stále dá uvažovat lineární charakter křivky. Hodnotu dynamického modulu pružnosti E zjistíme z proložené přímky, která má tvar  $y = 169712x + 1218,2$ . Hodnota E je konstanta u neznámé x, tedy  $E = 169\,712 \text{ MPa}$ . Hodnota dynamického modulu pružnosti E u nerezové oceli 316L bude dále uvažována k následnému výpočtu v programu ANSYS APDL právě z hysterezní smyčky o amplitudě 1 %, protože tuto hodnotu uvažujeme jako limitní.

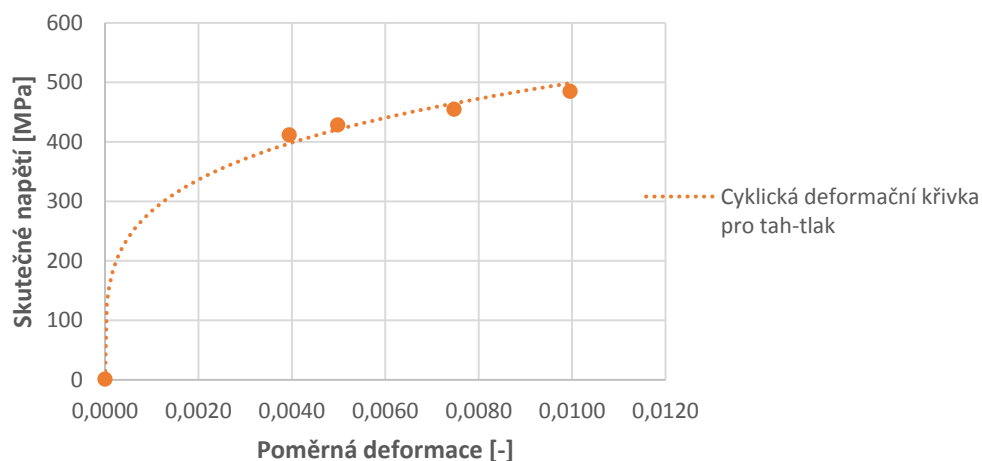
Tyto vyhodnocení byly provedeny i pro ostatní vzorky. Byly tedy vyhodnoceny jejich hysterezní smyčky, vyhodnocena závislost amplitudového napětí na počtu cyklů do

poruchy a konečně i dynamický modul pružnosti. Hysterezní smyčky čtyř vzorků jsou uvedeny v jediném grafu (Graf 4). Testy byly řízeny s konstantní řízenou amplitudou deformace, ovšem u každého z nich byla tato hodnota amplitudy jiná.



*Graf 4 – Vyhodnocení hysterezních smyček z experimentů pro tah-tlak, řízených s konstantní amplitudou deformace.*

Z tohoto grafu lze vyhodnotit cyklickou deformační křivku, ta vznikne proložením vrcholů všech hysterezních smyček a je jednou ze základních charakteristik v cyklické plasticitě. V Grafu 5 lze vidět právě tuto křivku, pro aproximaci se používá mocninná funkce.



*Graf 5 – Cyklická deformační křivka vyhodnocena z experimentů pro tah-tlak spojující vrcholy tahových větví hysterezních smyček.*

Z důvodu vyšetřování odchylky od Masingova chování bylo nutné všechny hysterezní smyčky zarovnat k hornímu okraji tahové větve. Nejprve byla přepočítána poměrná deformace na podélnou plastickou deformaci. Nejprve byla tedy vypočtena lineární elastická deformace dle vzorce

$$\varepsilon_{lin} = \frac{\sigma_{min}}{E} . \quad (4.6)$$

Dále se spočítala logaritmická plastická deformace dle vzorců

$$\varepsilon_{pl_{lin}} = \varepsilon - \varepsilon_{lin} , \varepsilon_{pl_{log}} = \ln \left( 1 + \varepsilon_{pl_{lin}} \right) , \quad (4.7)$$

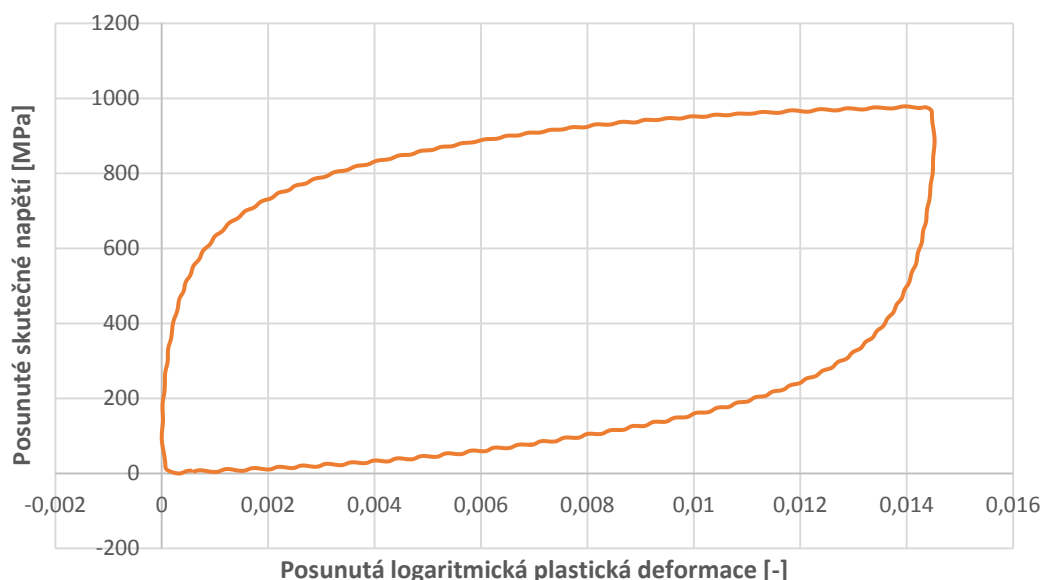
a poté byla odečtena plastická deformace v každém měřeném bodě od minimální hodnoty této plastické deformace v cyklu. To značí posun plastické deformace do kladných hodnot grafu

$$\varepsilon_{posun_{pl}} = \varepsilon_{pl} - \varepsilon_{pl_{min}} . \quad (4.8)$$

Ted' jen zbývalo přepočítat hodnoty napětí tak, aby byly všechny v grafu též v kladných hodnotách. To se provedlo dle vzorce

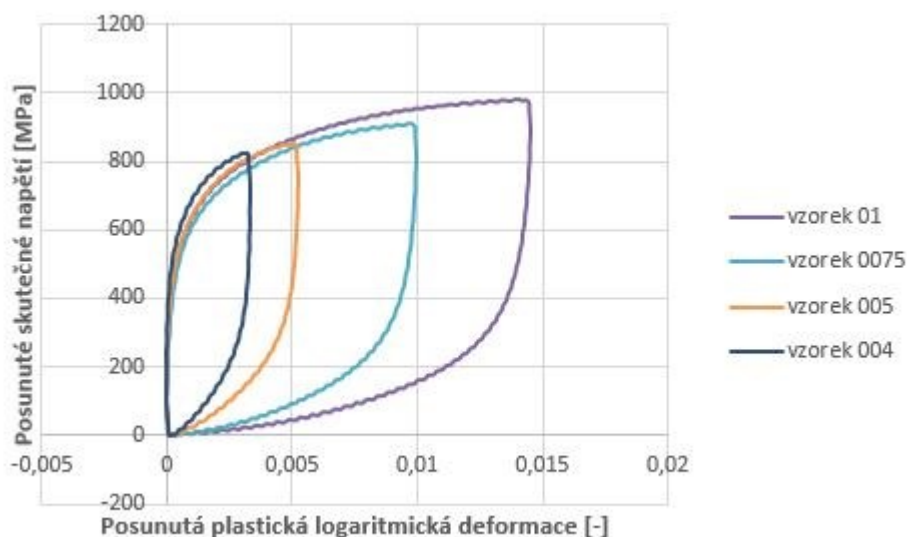
$$\sigma_{posun} = \sigma - \sigma_{min} . \quad (4.9)$$

Výsledná závislost posunutého skutečného napětí na posunuté logaritmické plastické deformaci je uvedena v Grafu 6. Hodnoty v grafu jsou uvedeny opět pro vzorek s konstantní řízenou amplitudou deformace  $\varepsilon = 0,01$ .



*Graf 6 – Závislost posunutého skutečného napětí na posunuté logaritmické plastické deformaci.*

Stejným způsobem byly přepočteny i ostatní vzorky, a všechny tyto závislosti byly dány do jednoho grafu (Graf 7).



*Graf 7 – Závislost posunutého skutečného napětí na posunuté logaritmické plastické deformaci všech naměřených vzorků.*

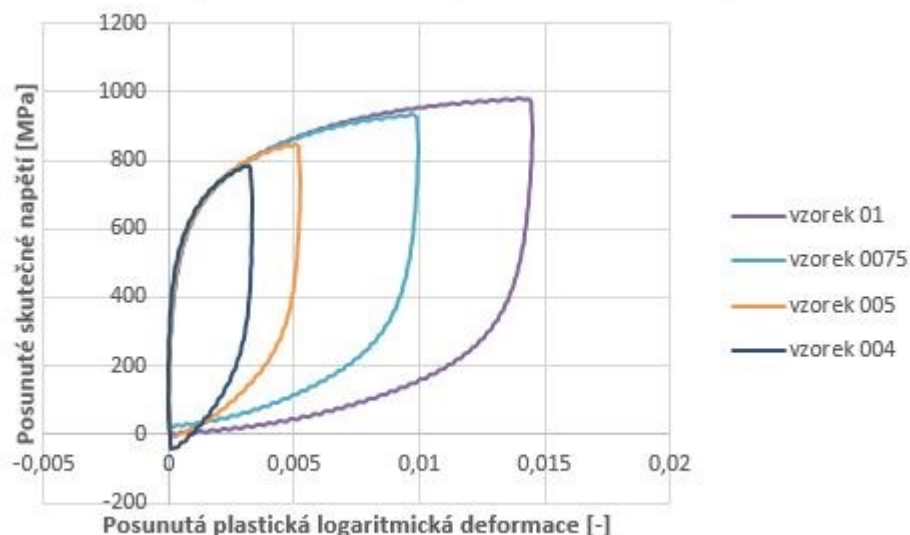
Kvůli zjištění, zda tento materiál vykazuje či nevykazuje Masingovo chování se tyto hysterezní smyčky zarovnají k horní tahové větvi. Hodnoty posunutí jednotlivých hysterezních smyček ke vzorku, jehož tlaková větev je nejvyšší, jsou uvedeny v Tabulce 2. Tento posuv by značen písmenem Q.

*Tabulka 2 – Hodnota posuvu zarovnání zbývajících hysterezních smyček k horní tahové větvi největší hysterezní smyčky.*

Naměřené vzorky	Hodnota posuvu Q
Vzorek 0075	25
Vzorek 005	-5
Vzorek 004	-40

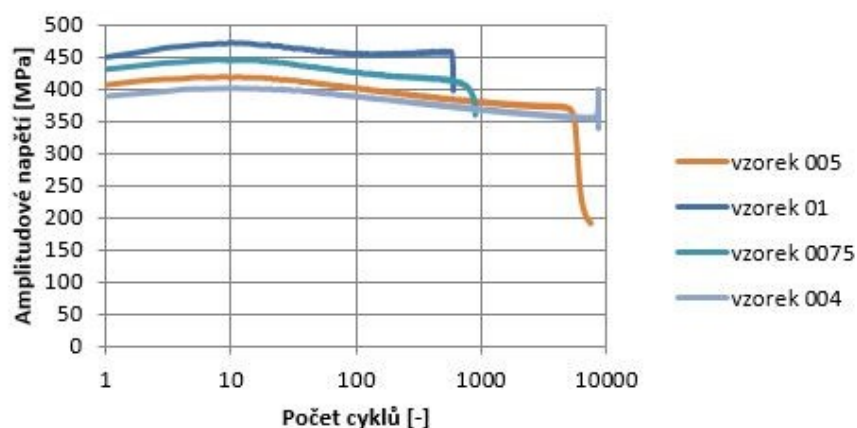
Výsledné zarovnání hysterezních smyček k hornímu okraji tahové větve vzorku s největší hysterezní smyčkou lze vidět na Grafu 8. K Masingovu chování dochází, když se jednotlivé tahové větve hysterezních smyček překrývají, jinými slovy vytvoří jednu celistvou křivku. Uvedené lze vidět na Grafu 8, což je prokázáno již jinými, předchozími experimenty, že kovové materiály Masingovo chování nevykazují, vrcholy křivek se nepřekrývají a nevytvoří jednu celistvou křivku.





*Graf 8 – Zarovnání hysterezních smyček k hornímu okraji tahové větve.*

Na Grafu 9 jsou ještě zobrazeny závislosti amplitudy napětí na počtu cyklů do porušení vzorku, tedy křivky cyklického zpevnění/změkčení. Jsou zde uvedeny čtyři křivky uvažovaných vzorků z experimentů odpovídajících Grafu 4. Z grafu lze vyčíst, že materiál na začátku zkoušky nejprve zpevňuje, poté dochází k chvilkové stabilizaci a následně změkčuje do porušení vzorku. Pro větší přehlednost je vodorovná osa, na které je vykreslen počet cyklů, zobrazena v logaritmickém měřítku.



*Graf 9 – Ukázka zpevňování/změkčování materiálu při experimentální zkoušce*

## 4.2 Krut

Další vyhodnocení experimentů je provedeno pro zkoušky na vzorcích s dutým průřezem, jejichž výkres jsou uvedeny v příloze, namáhaných krutem se symetrickým střídavým cyklem ( $R = -1$ ). Součinitel nesymetrie cyklu se definuje podle vzorce

$$R = \frac{\sigma_d}{\sigma_h}. \quad (4.10)$$

Z dat vyhodnocených experimentální zkouškou, ke kterým patří např. síla, popř. moment, deformace apod. se vypočte napětí v krutu  $\tau$  a zkos  $\gamma$ . Vypočte se tedy nejprve průřezový modul v krutu  $W_k$ . Pro průřez vzorku s mezikružím

$$W_k = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}. \quad (4.11)$$

Pro vzorek s kruhovým průřezem je výpočet  $W_k$  uveden v rovnici

$$W_k = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \quad (4.12)$$

Dále lze tedy přepočíst moment na napětí v krutu  $\tau$  dle vztahu

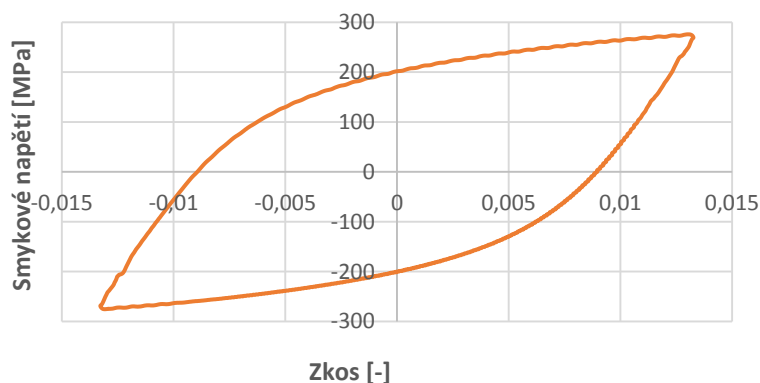
$$\tau = \frac{M_k}{W_k}, \quad (4.13)$$

kde  $M_k$  kroutící moment, získaný z experimentální zkoušky. Dále bylo pro vyhodnocení napětově-deformační charakteristiky potřeba spočítat zkos  $\gamma$ . Ten se vypočte dle vzorce

$$\gamma = \frac{\pi \cdot \text{deformace}}{180}, \quad (4.14)$$

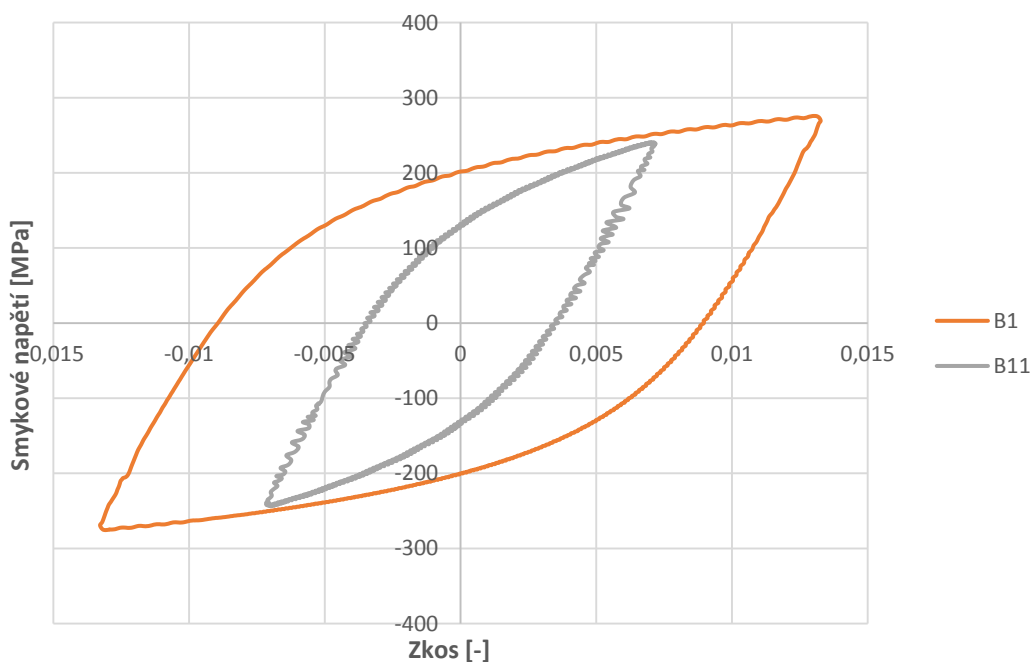
protože „*deformace*“ je na extenzometru EPSILON3550 měřena ve stupních.

Poté již nebrání nic tomu, aby se vyhodnotila napětově-deformační charakteristika. Jako příklad je zde uveden právě vzorek, označen jako B1. Závislost smykového napětí na zkosu je uvedena v Grafu 10.



Graf 10 – Závislost smykového napětí na zkosu z experimentálního měření pro krut.

Totéž bylo provedeno i pro druhý vzorek, všechna data byla přepočtena do použitelných veličin, s kterými se dále pracuje obdobným způsobem. Dvě hysterezní smyčky v krutu byly vyhodnoceny do jednoho grafu, viz Graf 11.



*Graf 11 – Vyhodnocení napětově-deformační charakteristik obou vzorků pro krut.*

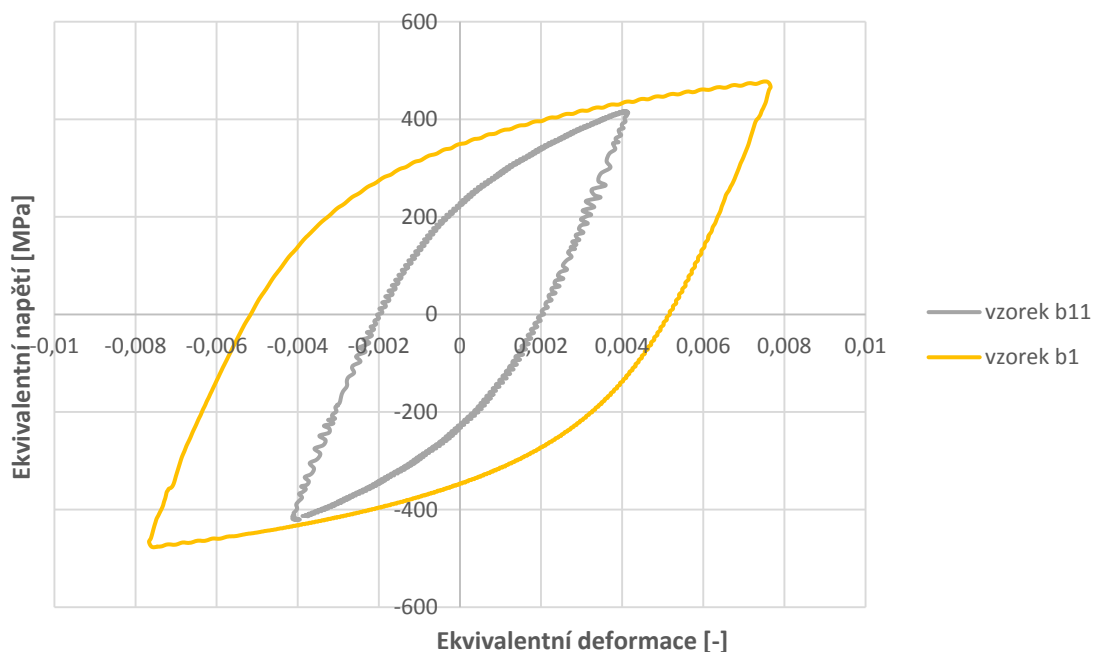
Aby mohlo být provedeno porovnání výsledných výsledky hysterezních smyček s experimenty pro tah/tlak, je nutný přepočet smykového napětí a zkosu na ekvivalentní napětí a ekvivalentní deformaci. Napětí se přepočte dle vzorce

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{3} \cdot \tau, \quad (4.15)$$

a ekvivalentní deformace se přepočte dle vzorce uvedeného v rovnici

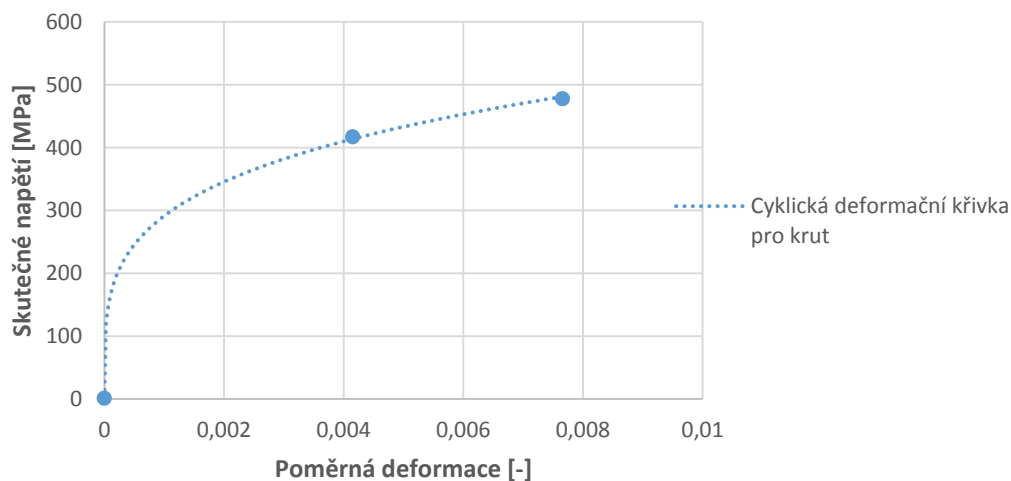
$$\varepsilon_{eqv} = \frac{\pi \cdot deformace}{180 \cdot \sqrt{3}}. \quad (4.16)$$

Na Grafu 12 lze vidět přepočet napětí a zkosu na ekvivalentní napětí a ekvivalentní deformaci, s kterými lze porovnávat výsledky společně ze zkoušky vzorků zatížených na tah/tlak.



*Graf 12 – Napětově-deformační charakteristika vzorků zatížených krutem, přepočtena do závislosti ekvivalentního napětí - ekvivalentní deformace.*

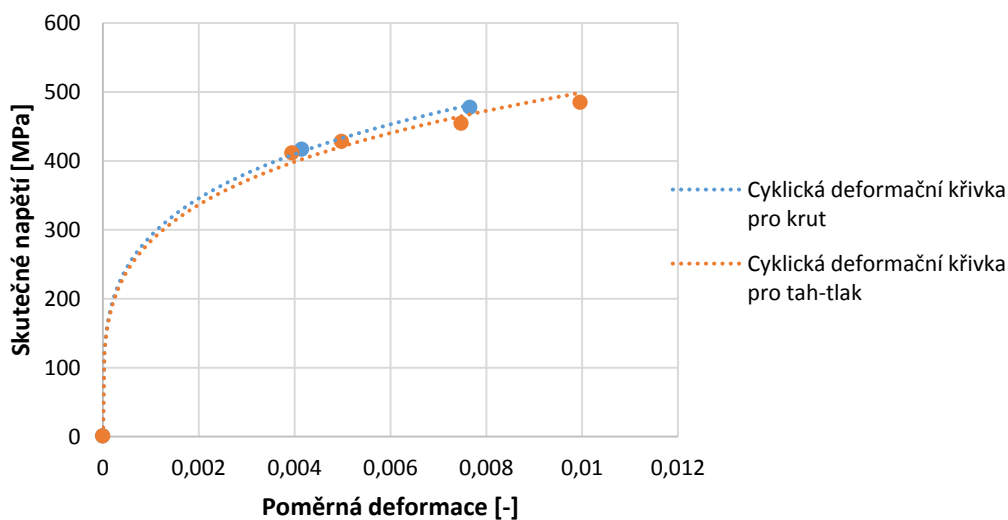
Dále byla vyhodnocena z vrcholů hysterezních smyček cyklická deformační křivka. Tyto body se proloží mocninnou funkcí. Výsledná křivka je zobrazena na Grafu 13.



*Graf 13 – Cyklická deformační křivka pro vzorky zatížené krutem.*

V Grafu 14 je znázornění obou cyklických deformačních křivek, jak pro zkoušku vzorků zatíženou střídavě na tah/tlak, tak pro zkoušku vzorků zatíženou krutem. Cyklická

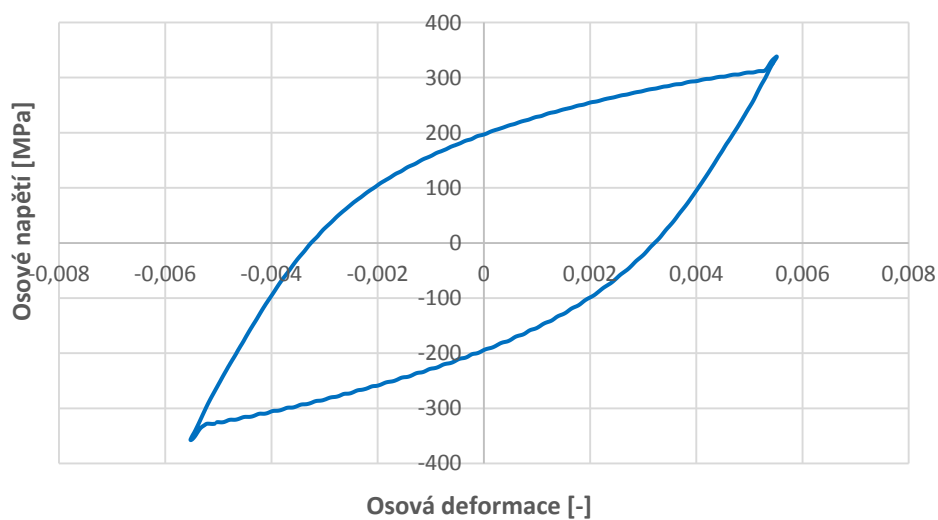
deformační křivka tahová je oranžová, pro krut je barva modrá. Zjištěná shoda je v tomto případě poměrně dobrá.



Graf 14 – Cyklické deformační křivky vyhodnocených vzorků z experimentů.

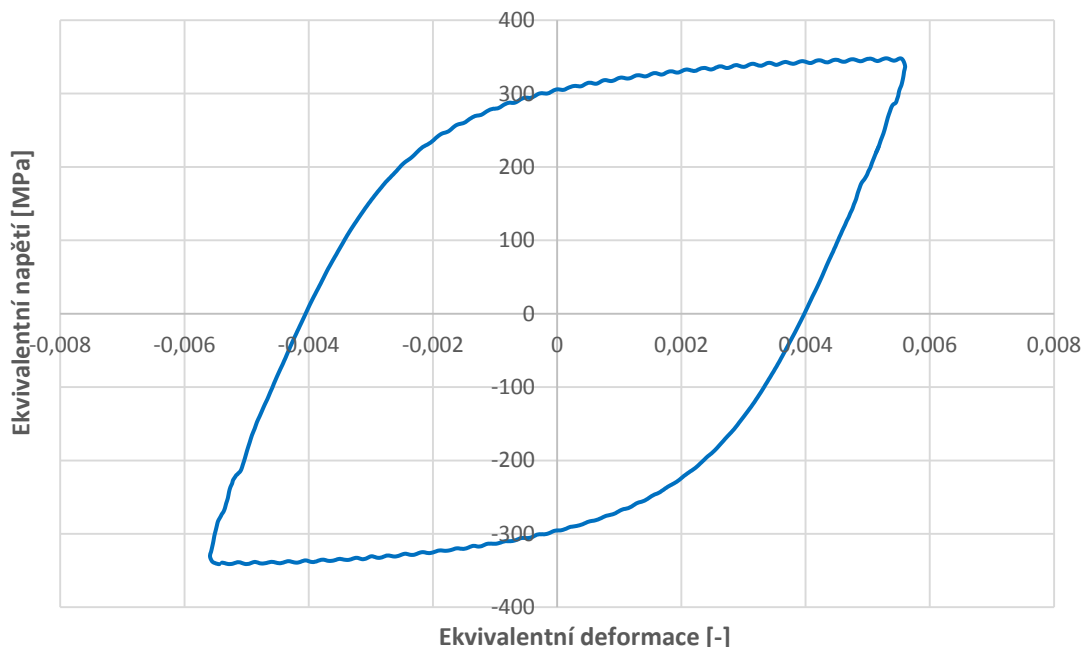
#### 4.3 Kombinace tah-tlak/krut

Dalším experimentem byl test na vzorku zatíženém kombinací jednoosého namáhání střídavě na tah-tlak a krutu. Nejprve byla přepočtena síla na osově napětí dle vzorce (4.2). Následně byla vypočtená osová deformace dle vzorce (4.1). Grafu 15 je uvedena vyhodnocená závislost osověho napětí na osově deformaci.



Graf 15 – Závislost osověho napětí na osově deformaci.

Dále bylo vypočteno smykové napětí dle vzorce (4.13) a ekvivalentní deformace dle vztahu (4.14). Smykové napětí bylo poté ještě přepočteno na ekvivalentní napětí dle vzorce (4.15). V grafu 16 je uvedena výsledná závislost ekvivalentního napětí na ekvivalentní deformaci.

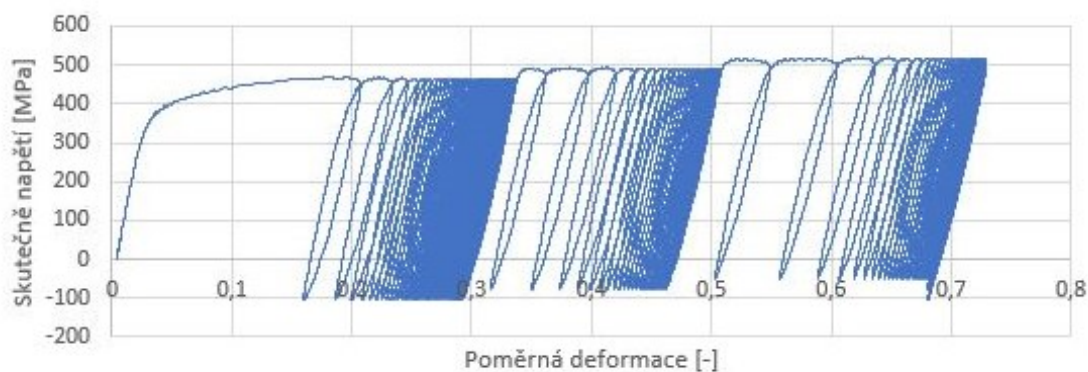


*Graf 16 – Závislost ekvivalentního napětí na ekvivalentní deformaci.*

#### 4.4 Ratcheting

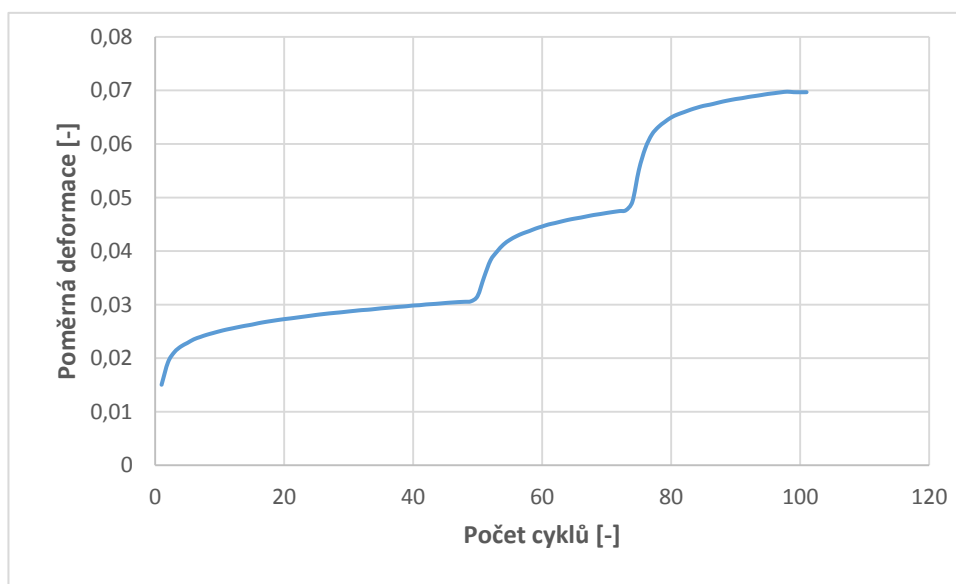
Posledním experimentem byl test na vzorku podrobeném jednoosému namáhání střídavě na tah/tlak ovšem s konstantní řízenou amplitudou síly, nikoliv deformace. Test byl složen ze tří sekvencí se shodnou amplitudou síly, avšak rozdílnou střední hodnotou. Pro první sekvenci byla střední hodnota napětí  $\sigma_{m1} = 178$  MPa, v druhé sekvenci byla střední hodnota napětí  $\sigma_{m2} = 204$  MPa a pro třetí sekvenci byla střední hodnota napětí  $\sigma_{m3} = 227$  MPa. Amplituda napětí byla  $\sigma_a = 280$  MPa. Nesymetrické zatěžování může vyvolat tzv. ratcheting, tedy akumulaci plastické deformace s narůstajícím počtem cyklů. Z experimentů je možno zjistit sílu, kterou byl vzorek reálně zatěžován, dále prodloužení zkušební části měřené extenzometrem apod. Právě tyto dvě veličiny se využijí pro další vyhodnocování experimentu. Nejprve je spočtena deformace z prodloužení, dle vzorce (4.1), dále je nutno přepočíst sílu na napětí dle vzorců (4.2) a (4.3).

V Grafu 17 je uvedena vyhodnocená závislost napětí na deformaci pro zmíněný sekvenční test.



*Graf 17 – Závislost skutečného napětí na poměrné deformaci při zkoušce řízené s konstantní amplitudou síly – ratcheting.*

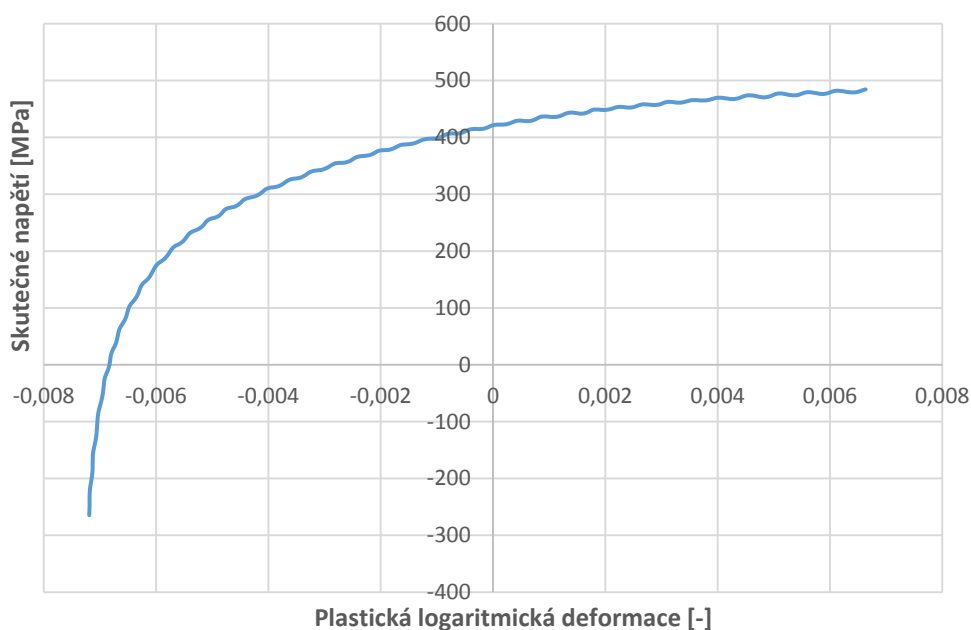
V Grafu 18 je zobrazena závislost poměrné deformace na počtu cyklů, vyhodnocené z experimentálního měření.



*Graf 18 – Závislost poměrné deformace na počtu cyklů vyhodnocené z experimentu ratchetingu.*

## 5 Určení konstant Chabocheova modelu

Hledané parametry Chabocheova modelu pro dvě kinematické části ( $M=2$ ) se určily pomocí nelineární metody nejmenších čtverců. Hledanými parametry jsou  $\sigma_Y$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ . Tyto konstanty se určují z kladné tahové větve. Pro určení těchto parametrů byl zvolen vzorek s největší amplitudou deformace (deformačně řízený test). Nejprve bylo nutné si vykreslit do grafu závislost skutečného napětí na plastické logaritmické deformaci. Tato závislost je uvedena v Grafu 18.



*Graf 18 – Tahová větev hysterezní smyčky vzorku s největší řízenou konstantní amplitudou deformace.*

Vypočtené hodnoty konstant, které se využijí později do programu ANSYS APDL k zadání Chabocheova modelu, jsou uvedené v Tabulce 3.

*Tabulka 3 – Hodnoty konstant pro Chabocheho model se dvěma kinematickými částmi ( $M=2$ ).*

$\sigma_Y$	180 [MPa]
$C_1$	155 190 [MPa]
$C_2$	800 [MPa]
$\gamma_1$	619
$\gamma_2$	1.46

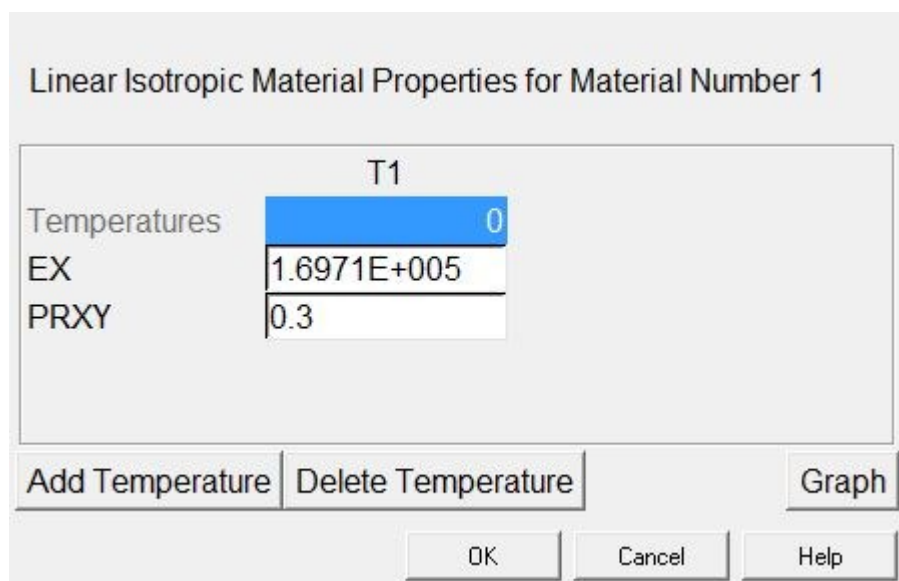


## 6 Výpočet MKP

Pro výpočet pomocí metody konečných prvků byl zvolen program ANSYS APDL. Do výpočtů v tomto programu lze zahrnout modely plasticity, které jsou právě nutné pro tyto výpočty. Pro všechny případy zatěžování, tj. jednoosé (tah/tlak), více-osé (krut) a jejich kombinaci, a dále potom pro zkoušku řízenou s konstantní amplitudou síly (ratcheting) byl použit Chabocheův materiálový model o dvou kinematických částech a bylo zde zahrnuto i nelineární izotropní zpevnění.

### 6.1 Tah/tlak

Nejprve byl nadefinován materiálový model, Chabocheův model v kombinaci s nelineárním izotropním zpevněním. Na Obr. 21 lze vidět nadefinování lineárně izotropního materiálu, kde EX značí dynamický modul pružnosti E a jeho hodnota činí  $E = 169\,712\text{ MPa}$ . PRXY zde značí Poissonovo číslo  $\mu = 0,3$ .



Obr. 21 – Definice lineárně izotropního materiálu.

Dále byl nadefinován Chabocheův model o dvou kinematických částech, viz Obr. 22, kde hodnota C1 odpovídá hodnotě meze kluzu materiálu  $\sigma_Y = 130\text{ MPa}$ . Hodnota C2 zde znamená  $C_1$  v Chabocheově modelu,  $C_1 = 155\,190\text{ MPa}$ , C3 odpovídá parametru  $\gamma_1 = 619$ . C4 odpovídá parametru  $C_2 = 8000\text{ MPa}$ , a konečně C5 odpovídá parametru  $\gamma_2 = 1,46$ .

Chaboche Kinematic Hardening for Material Number 1

	T1
Temperature	0
C1	130
C2	1.5519E+005
C3	619
C4	8000
C5	1.46

Obr. 22 – Definice Chabocheova modelu v programu ANSYS APDL.

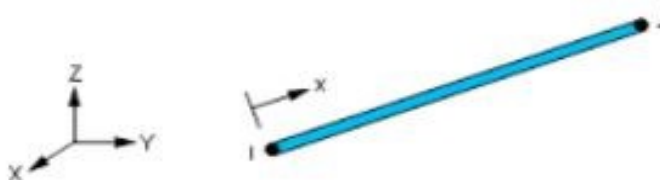
Poslední věcí při nadefinování materiálových parametrů bylo zahrnutí nelineárního izotropního zpevnění, viz. Obr. 23, kde Sigy0 označuje počáteční mez kluzu v daném nelineárním izotropním modelu zpevnění, pro tento případ  $\sigma_{Y0} = 130$  MPa,  $R0 = 0$  MPa,  $R_{\infty} = 40$  MPa a  $b = 12$ . Poslední dva parametry byly stanoveny s využitím vztahu (3.37).

Nonlinear Isotropic Hardening for Material Number 1

	T1
Temperature	0
Sigy0	130
R0	0
Rinf	40
b	12

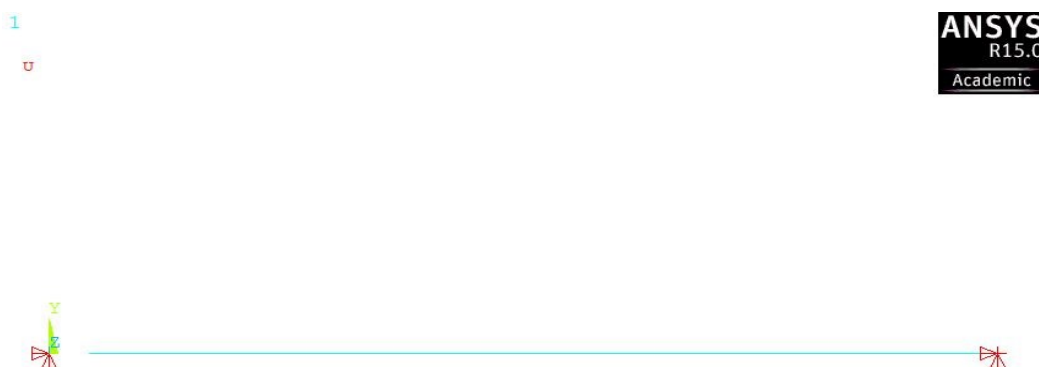
Obr. 23 – Definice nelineárního izotropního zpevnění.

Další důležitou věcí při modelování daného výpočtu bylo nadefinovat prvek, který se pro tento výpočet bude hodit. V případě zkoušky řízené s konstantní amplitudou deformace s jednoosým cyklickým zatěžováním se tato úloha modeluje s prvkem LINK 180. Tento prvek je klasickým případem prutového prvku, viz. Obr. 24.



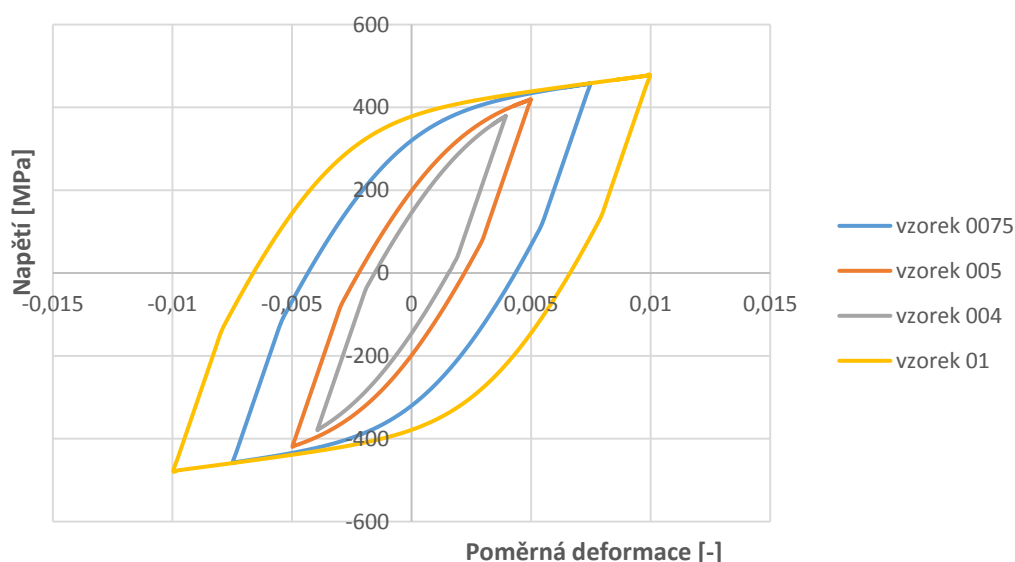
*Obr. 24 – Prutový prvek LINK 180. [9]*

Dále byly vymodelovány dva uzly, které byly spojeny elementem právě tohoto typu LINK 180. Nadefinovány byly také okrajové podmínky. Pro tento případ jednoosého cyklického zatěžování. Bylo zamezeno všem posuvům v levém uzlu. Dále bylo zamezeno posuvům v ose Y a v ose Z pravého uzlu, což symbolizuje jediný možný pohyb uzlu v ose X a tudíž i v ose normály prutového prvku, viz Obr. 25.



*Obr. 25 – Nadefinované okrajové podmínky.*

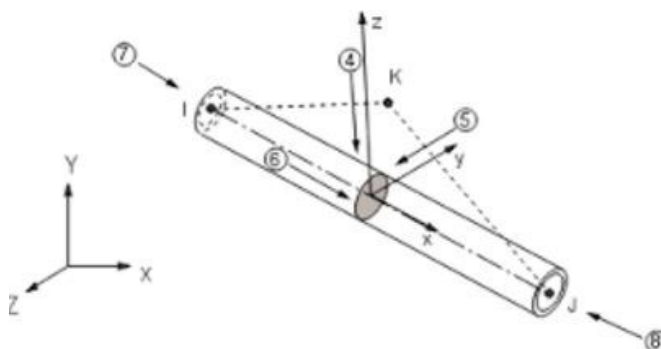
Poté byla aplikována okrajová podmínka odpovídající řízení experimentu s konstantní amplitudou deformace  $\varepsilon_a$  (tabulkou zadán posuv závislý na čase – po částech lineární průběh). Úloha byla připravena ve formě makra, které umožňuje parametrické řešení úlohy a automatický zápis výsledků v podobě hysterezní smyčky v posledním cyklu do TXT souboru. Makro je součástí přílohy na CD-ROM. Výsledné závislosti napětí na deformaci jsou patrné pro všechny řešené případy v Grafu 19.



Graf 19 – Vyhodnocení simulace hysterezních smyček pro tah-tlak pomocí MKP.

## 6.2 Krut

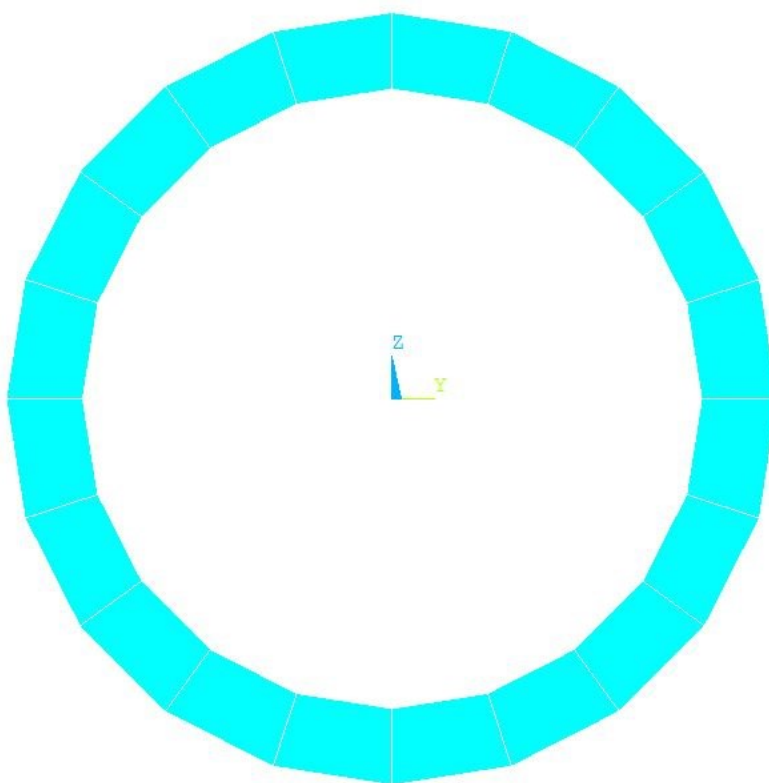
Pro tento případ byl nadefinován materiálový model totožný, jako z cyklického zatěžování v jednoosém případě. Použitým typem elementu byl PIPE 288. Tento element reprezentuje prvek trubky, viz Obr. 26, což je speciální verze nosníkového prvku vhodná pro modelování potrubních systémů. Výhodou je možnost aplikace torzního zatížení.



Obr. 26 – Typ elementu PIPE 288. [10]

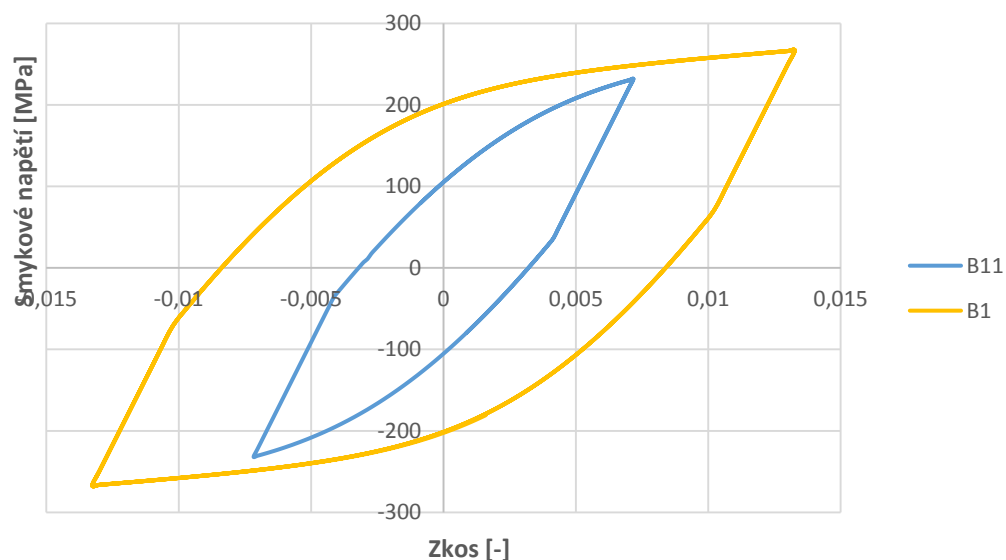
Ukázka použitého dělení průřezu elementu na buňky je uvedena na Obr. 27.

1



*Obr. 27 – Ukázka modelu trubky, PIPE 288.*

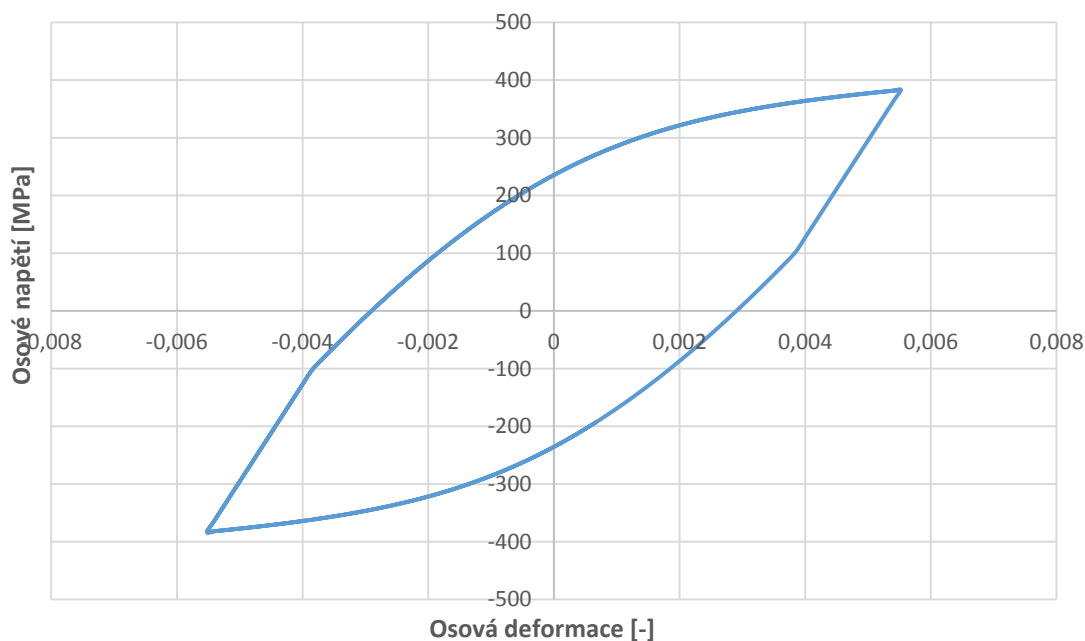
Poté byly nadefinovány okrajové podmínky. Ty pro tento případ jsou následující. Pro levý uzel jsou zamezeny všechny posuvy a rotace. Pro pravý uzel je zamezen posuv ve směru osy X, podobně jako u experimentu. Poté je nadefinováno řízení s konstantní amplitudou rotace v ose X. Poté byl spuštěn výpočet a vyhodnoceno smykové napětí a zkos. V Grafu 20 je vyhodnocena závislost právě smykového napětí na zkosu.



*Graf 20 – Vyhodnocené simulace hysterezních smyček pro krut z programu ANSYS APDL.*

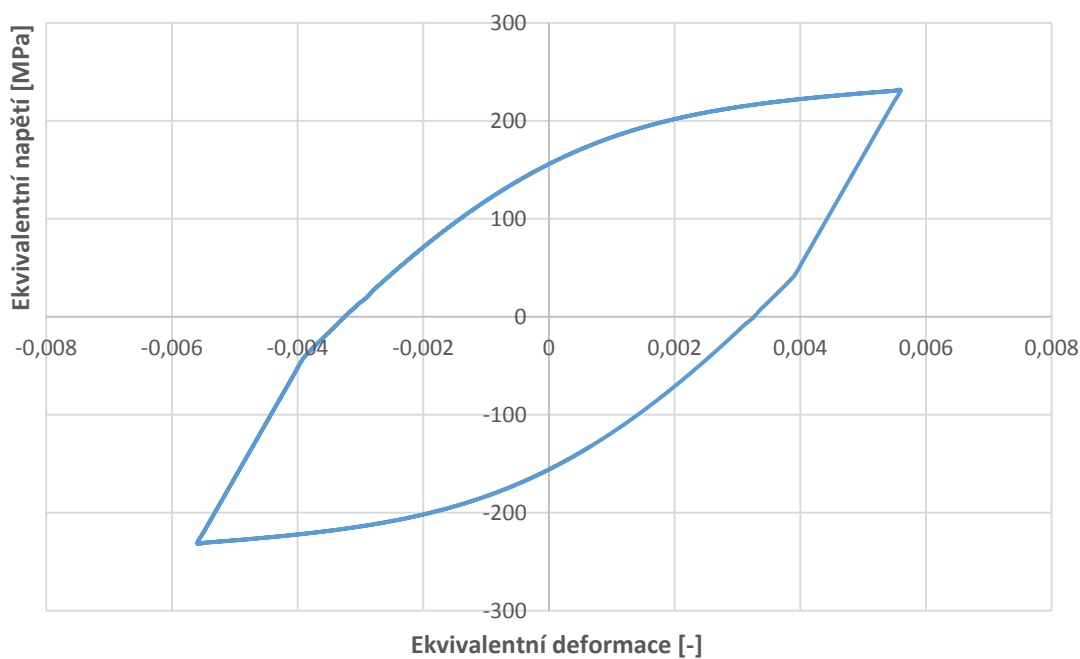
### 6.3 Kombinace tahu/tlaku a krutu

Pro tento případ byl použit stejný prvek a materiál jako pro modelování krutu. Jediný rozdíl je v okrajových podmínkách. V levém uzlu je zamezeno všem posuvům a všem rotacím. Pro pravý uzel je definováno řízení pomocí konstantní amplitudy  $\varepsilon_a$  (posuv ve směru osy X zadán opět tabulkou) a konstantní amplitudy rotace v ose X (rotace kolem osy X zadána opět tabulkou). Výpočet byl opět připraven v makru, který je také v příloze na CD-ROM. Poté byl spuštěn výpočet. Vyhodnocení výsledků je ukázáno v následujících grafech. V Grafu 21 je uvedena závislost osového napětí na poměrném prodloužení.



*Graf 21 – Simulace výsledků osového napětí na poměrné deformaci pro případ kombinace tah-tlak/krut.*

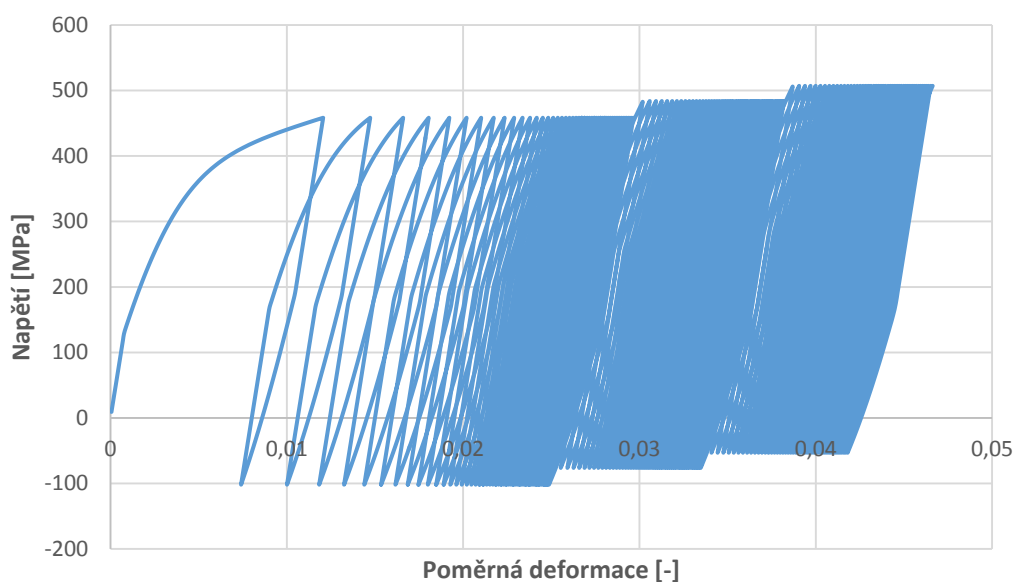
V Grafu 22 je uvedena závislost ekvivalentního napětí na ekvivalentní deformaci.



*Graf 22 – Simulace závislosti ekvivalentního napětí na ekvivalentní deformaci z programu ANSYS APDL.*

## 6.4 Ratcheting

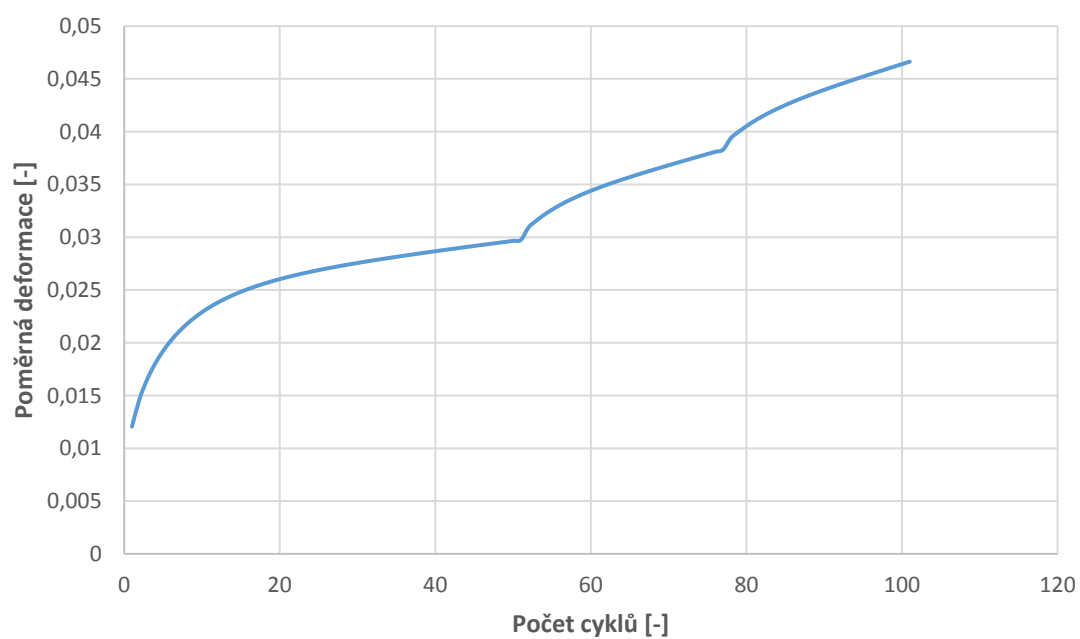
Pro tento případ bylo opět nadefinován stejný materiálový model jako u předchozích případů. Byl zde použit element LINK 180. Liší se zde okrajové podmínky modelu. V levém uzlu bylo zamezeno všem posuvům a rotacím, pravý uzel byl zachycen ve směru osy Y a osy Z. Následně pro pravý uzel bylo předepsáno řízení s konstantní amplitudou síly a proměnnou střední hodnotou ve třech blocích, což je typické pro ratcheting. V Grafu 23 je zobrazena výsledná závislost napětí na poměrné deformaci, lze vidět také měnící se střední napětí na tři různé hodnoty, pro 50 cyklů, 25 cyklů a 25 cyklů.



*Graf 23 – Simulace závislosti napětí na poměrné deformaci při řízení s konstantní amplitudou síly – ratcheting z programu ANSYS APDL.*

V Grafu 24 je uvedena závislost poměrné deformace na počtu cyklů, aby bylo lépe rozpoznatelné, že ratcheting opravdu nastává.





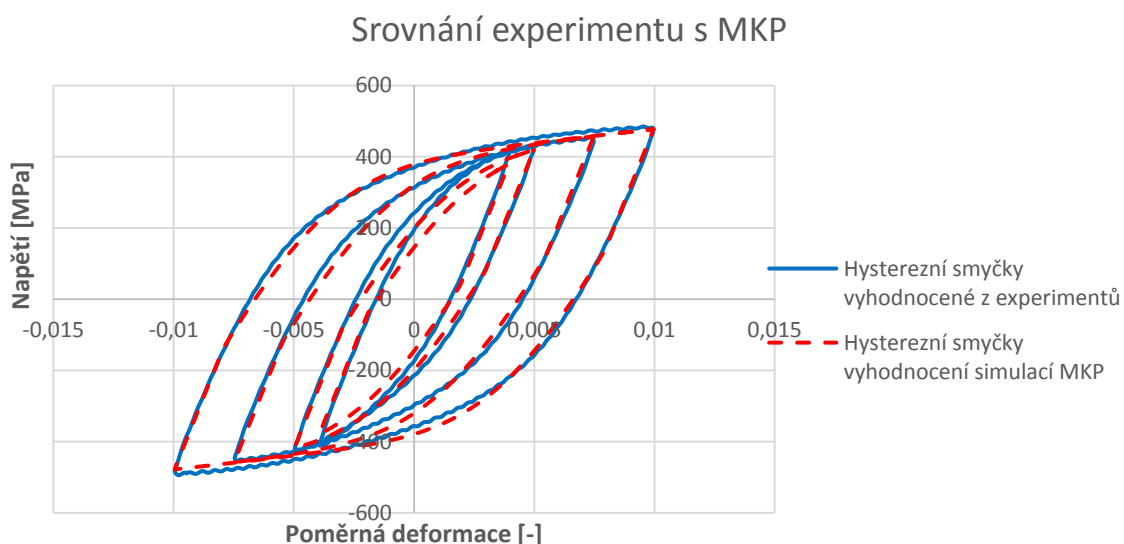
*Graf 24 – Simulace závislost poměrné deformace na počtu cyklů z programu ANSYS APDL.*

## 7 Srovnání výsledků MKP a experimentu

V této kapitole bude ukázáno srovnání všech naměřených výsledků z experimentů spolu s výsledky, vypočítanými v programu ANSYS APDL.

### 7.1 Tah/tlak

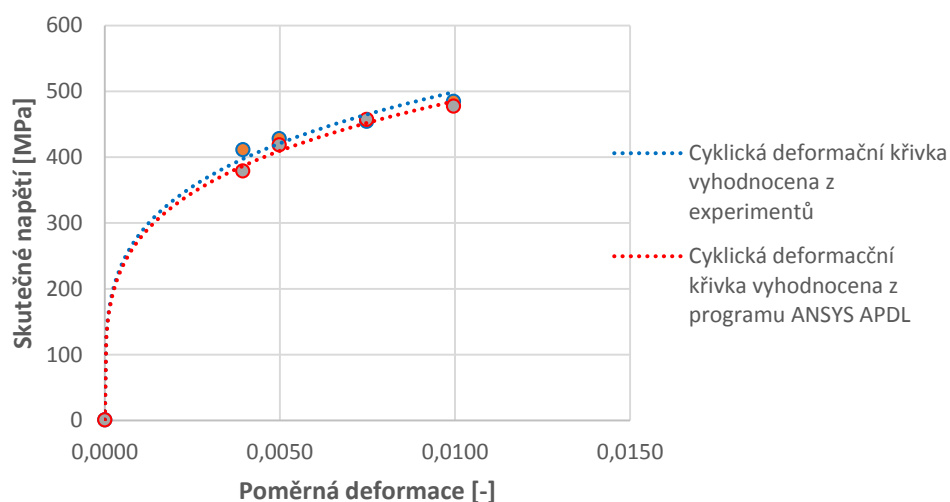
V Grafu 25 je srovnání hysterezních smyček experimentálního měření s MKP pro cyklické jednoosé zatěžování. Modrou barvou jsou vyhodnoceny výsledky experimentálního měření, přerušovanou červenou barvou jsou vyhodnoceny výsledky pomocí MKP.



*Graf 25 – Srovnání hysterezních smyček vzorků pro tah-tlak z experimentálního měření a simulací pomocí MKP.*

Při srovnání výsledků experimentálního měření a výsledků vyhodnocených pomocí MKP lze očekávat, že vzorek s konstantní amplitudou deformace 1 %, sedí výsledky úplně nejlépe. Celý výpočet se totiž ladil k tomuto vzorku, zde je odchylka od experimentálního řešení zanedbatelná. Největší chyba je očekávána u vzorku s nejnižší amplitudou deformace. Zde odchylka maximálního a minimálního napětí, vyhodnoceného pomocí metody konečných prvků, od experimentálního řešení je necelých 6 %. Tato odchylka je samozřejmě zapříčiněna laděním modelu na vzorek s největší amplitudou deformace. Nelze tudíž postihnout i ostatní vzorky s téměř nulovou chybou. V Grafu 26 jsou ukázány

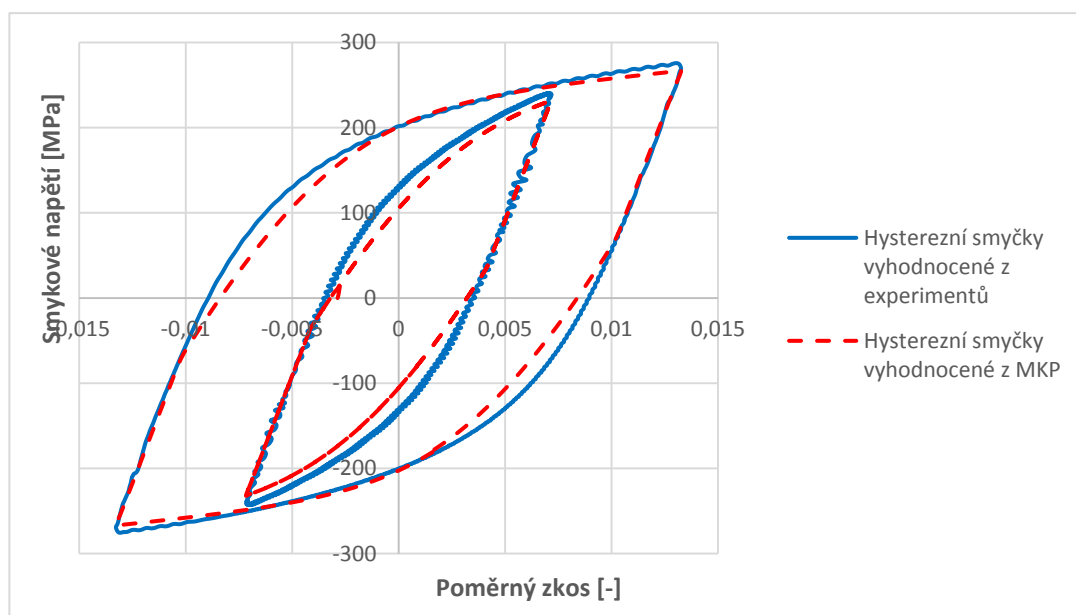
cyklické deformační křivky, červená je cyklická deformační křivka experimentů, šedá je z vyhodnocení pomocí metodou konečných prvků.



*Graf 26 – Cyklické deformační křivky pro tah-tlak vyhodnocené z experimentů a pomocí MKP.*

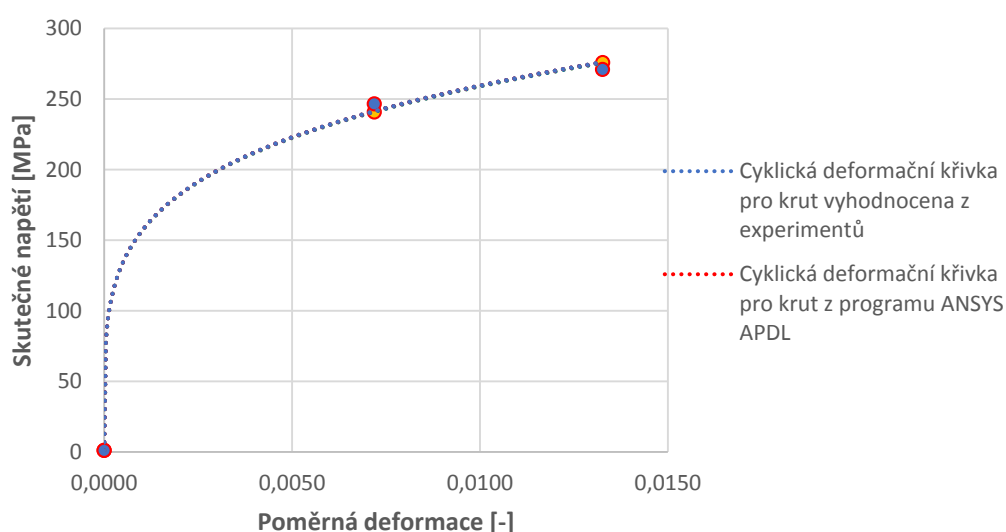
## 7.2 Krut

V Grafu 27 je ukázáno srovnání hysterezních smyček naměřených experimentálně a pomocí MKP při zatěžování krutem. Modrá čára zobrazuje vyhodnocení výsledků z experimentálního měření. Přerušovaná červená čára ukazuje výsledky výpočtu pomocí MKP.



*Graf 27 – Zobrazení srovnání výsledků hysteretických smyček vzorků pro krut z experimentálního měření a simulací MKP.*

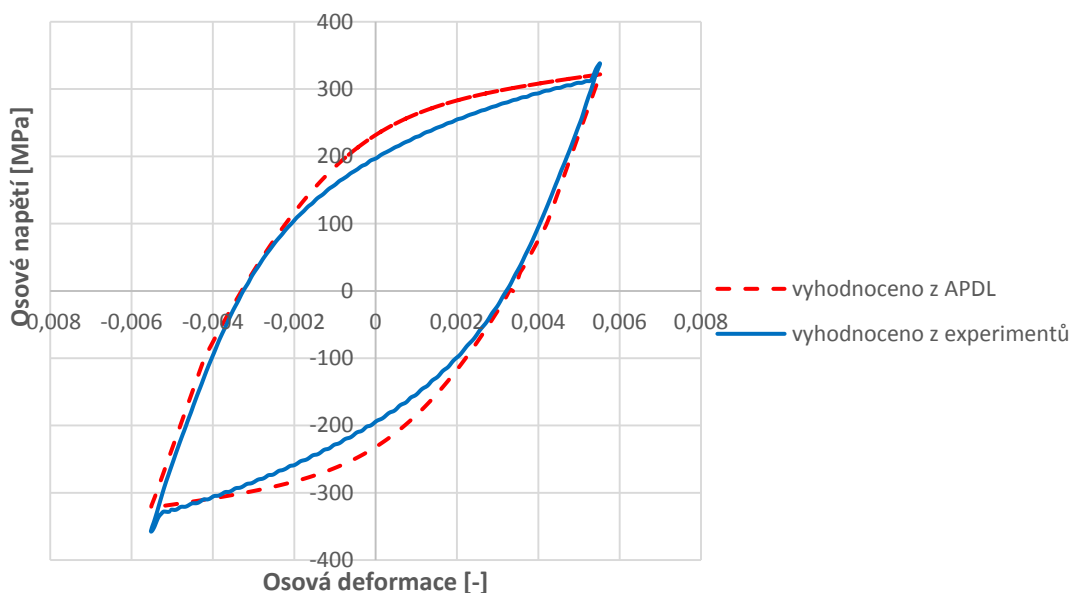
Lze očekávat, že výsledky nebudou zcela přesné, kvůli definování materiálového modelu, který se ladil na hysteretní smyčku s rozkmitem deformace 1 %. I tak ale odchylky napětí nejsou veliké, u smyčky s nižším rozkmitem deformace je odchylka 3 %, u druhé smyčky je to velmi podobné, odchylka zde činí necelé 3 %. V Grafu 28 je srovnání cyklických deformačních křivek. Modrá křivka reprezentuje vyhodnocené výsledky z experimentálních měření, červená křivka výsledky vypočtené pomocí MKP.



*Graf 28 – Cyklické deformační křivky.*

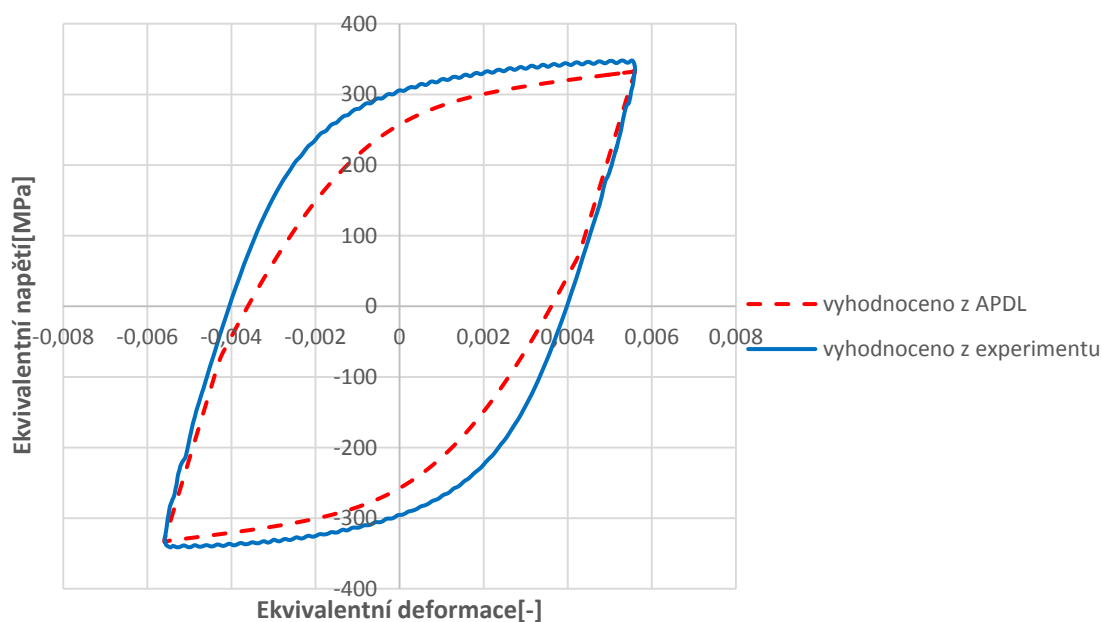
### 7.3 Kombinace tahu/tlaku a krutu

V Grafu 29 a jsou vyobrazeny a srovnány závislosti osového napětí na osově deformaci. Modrá čára je vyhodnocení výsledku experimentu, přerušovaná červená čára je vyhodnocení výpočtu pomocí MKP.



*Graf 29 – Srovnání vyhodnocení experimentů a simulace z programu ANSYS APDL.*

Lze vidět, že výsledky nejsou zcela přesné, z důvodu nadefinování a nastavení materiálového modelu pro jiný případ zatěžování na jeden vzorek s rozkmitem deformace 1 %. Těžko tedy postihnout jiné způsoby zatěžování a ostatní vzorky, aniž by nebyly nepřesnosti a odchylky ve výpočtech. Nicméně maximální a minimální napětí zjištěné experimentálním měřením se od vyhodnoceného výpočtu pomocí MKP liší pouze o 3 %. V Grafu 30 jsou zobrazeny závislosti ekvivalentního napětí na ekvivalentní deformaci.

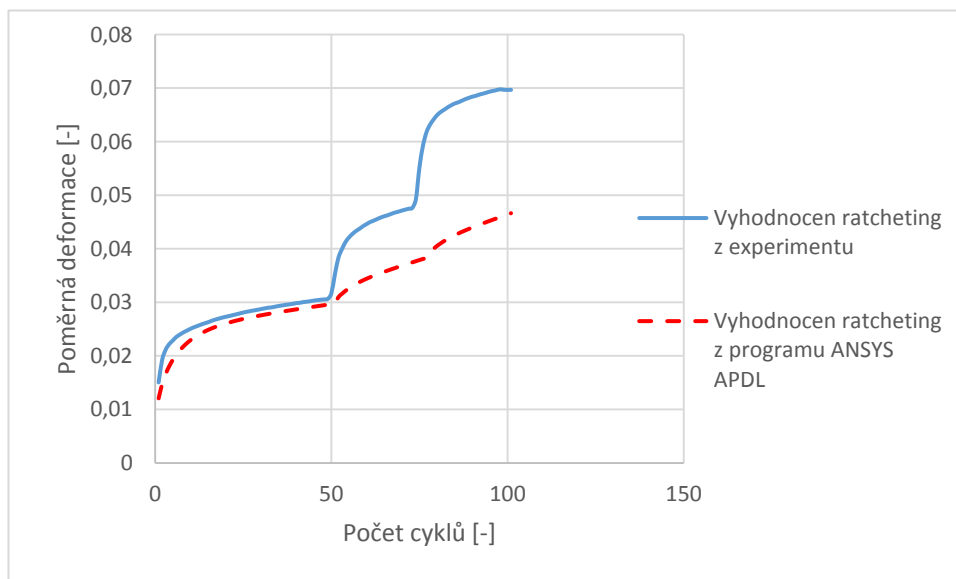


*Graf 30 – Srovnání vyhodnocení experimentů a programu ANSYS APDL.*

Zde jsou již výsledky zatíženy větší chybou, z důvodu materiálového modelu, který je naladěn pro jiné zatěžování. Hodnoty maximálního a minimálního napětí zjištěného experimentálně a pomocí MKP se liší kolem 3 %.

#### 7.4 Ratcheting

V Grafu 31 a v Grafu 32 jsou zobrazeny závislosti poměrné deformace na počtu cyklů.



*Graf 30 – Vyhodnocený ratcheting z experimentů*

Lze vidět, že uvažovaný Chabocheův model s kombinací s nelineárním izotropním zpevněním velmi dobře popisuje první blok při první hodnotě středního napětí  $\sigma_{m1} = 178$  MPa, v druhém a třetím bloku jsou odchylky od experimentu větší.

## 8 Závěr

Cílem této práce bylo vyhodnocení napěťově-deformačních charakteristik nerezové oceli 316L získaných při proporcionálním namáhání a vytvoření maker pro další výpočty pomocí metody konečných prvků, použitelných v programu ANSYS APDL.

Na úvod byla uvedena problematika cyklické plasticity, byly zde vysvětleny základní pojmy, jako je např. hysterezní smyčka, Bauschingerův efekt, cyklická deformační křivka. Poté byla popsána inkrementální teorie plasticity, do níž patří zejména aditivní zákon, podmínka plasticity, pravidlo tečení, kritéria zatěžování a pravidlo zpevnění. Na této bázi byly vysvětleny tři druhy zpevnění, a to izotropní, kinematické a kombinované zpevnění. Byly zde podrobněji popsány kinematické modely zpevnění, jako jsou Armstrong-Fredericův model zpevnění a Chabocheův model zpevnění. Poté byla podrobněji rozebrána kalibrace obou modelů zpevnění.

Další kapitola se zabývala vyhodnocování experimentálních měření. Je zde podrobně popsáno vyhodnocování experimentů, pro různé druhy namáhání (cyklické jednoosé, víceosé).

V následující části byly určeny materiálové konstanty, důležité pro zadání materiálového modelu do programu ANSYS APDL. Tyto konstanty byly určeny pomocí nelineární metody nejmenších čtverců z hysterezní smyčky vzorku s amplitudou deformace 1 %, která byla převedena na závislost skutečné napětí –logaritmická plastická deformace.

V další kapitole je popsán výpočet metodou konečných prvků, který byl řešen v programu ANSYS APDL. Nejprve bylo nutné nadefinovat materiálový model, který se pro všechny výpočty ladil na vzorek řízení s konstantní amplitudou deformace 1 %, namáhaný cyklicky na tah-tlak. Poté bylo nutné zvolit patřičný typ elementu (LINK180, PIPE288), jeho volba záležela na typu namáhání. Následně byly definovány okrajové podmínky. V této kapitole jsou také vyhodnoceny výsledné závislosti, vypočtené pomocí metody konečných prvků. Jsou také vytvořena funkční makra, pro všechny uvažované typy namáhání, která jsou k dispozici v příloze na CD-ROM.

Poslední kapitola se zabývala srovnáním naměřených a vyhodnocených výsledků z experimentálního měření spolu s výsledky, vypočtenými pomocí metody konečných



prvků. Pro jednoosé cyklické namáhání zkoušky s řízenou amplitudou deformace jsou srovnány čtyři vzorky. U vzorku s amplitudou deformace 1 % se numerické řešení oproti experimentálnímu prakticky neliší, protože všechny modely byly laděny právě na tento vzorek. U ostatních vzorků již odchylky nastávají, avšak výsledky jsou docela přesné. Maximální odchylka je zde vypočtena necelých 6 % u vzorku s nejnižší amplitudou deformace. Pro namáhání krutem jsou výsledky též velmi příznivé. Porovnávány zde byly dva vzorky, numerické řešení se od experimentálního řešení liší o necelé 3 %. Pro kombinované namáhání tah-tlak/krut se výsledek liší o trochu více, hlavně z hlediska tvaru křivky, ovšem pro hodnotu maximálního a minimálního napětí jsou výsledky opět poměrně přesné, odchylka činí pouze 3 % a to jak u závislosti osově napětí – osová deformace, tak i ekvivalentní napětí – ekvivalentní deformace, přepočtené pro torzní osu. Posledním experimentem srovnávaný s výpočtem MKP je vzorek, namáhaný na tah-tlak, ovšem s konstantní amplitudou síly. Dochází zde k ratchetingu, konkrétně ve 3 blocích (50 cyklů, 25 cyklů a 25 cyklů). V prvním bloku jsou výsledky MKP oproti experimentálnímu měření velmi přesné. Akumulace plastické deformace je uvažovaným kombinovaným modelem zpevnění velmi dobře popsána. U dalších dvou bloků již dochází k větší odchylce, tudíž lze říci, že se model zahrnutý v programu ANSYS spíše pro popis ratchetingu při namáhání s proměnlivou střední hodnotou napětí nehodí.

Lze vidět, že popis napětově-deformačního chování nerezové oceli 316L pomocí modelů cyklické plasticity není vůbec snadné. Obecně řečeno se výsledky predikce nikdy nebudou shodovat s experimentem zcela přesně, avšak lze v numerickém řešení cyklické plasticity nalézt vhodné materiálové modely a konstanty k nim příslušející, aby odchylky od experimentálních dat byly co nejmenší.

## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce panu doc. Ing. Radimu Halamovi, Ph.D za cenné rady, odborné vedení a věnovaný čas. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, přítelkyni a přátelům za psychickou podporu.

## Použitá literatura

- [1] Wikipedia: *Wikipedia [online]*, 2005 [cit. 2005-12-20], Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Chalk%27s\\_Ocean\\_Airways\\_Flight\\_101](https://en.wikipedia.org/wiki/Chalk%27s_Ocean_Airways_Flight_101).
- [2] RŮŽIČKA, Milan. *Kritéria a postupy při posuzování únavové pevnosti a životnosti konstrukcí [online]*, 2002 [cit. 2011-05-23]. Hysterezní smyčka. Dostupné z: [http://mechanika2.fs.cvut.cz/sources\\_old/pzk/3\\_2.html](http://mechanika2.fs.cvut.cz/sources_old/pzk/3_2.html)
- [3] HALAMA, Radim; PARMA, Slavomír; SEDLÁK, Josef; ŠOFEK, Michal. *Cyklická plasticita*. Číslo technické zprávy: FAD/11/003. Projekt FADOFF (Fatigue Analysis Documentation Office, podpořeno TAČR v letech 2011-2014), Ostrava: VŠB – Technická univerzita, 2011.
- [4] KLESNIL, M.; LUKÁŠ, P. *Únava kovových materiálů při mechanickém namáhání*. 1.vydání. Praha: Academia, 197. 224 s.
- [5] Radim Halama, Josef Sedlák and Michal Šofer (2012). *Phenomenological Modelling of Cyclic Plasticity, Numerical Modelling, Peep Miidla (Ed.)*, ISBN: 978-953-51-0219-9, InTech, p. 329-354. Dostupné z: <http://www.intechopen.com/books/numerical-modelling/phenomenological-modelling-of-cyclic-plasticity>
- [6] JIANG, Y.; ZHANG, J. *Benchmark experiments and characteristic cyclic plastic deformation behavior*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol. 24, p. 1481-1515.
- [7] HOLAS, J. *Bauschingerův efekt a cyklická plasticita u konstrukčních slitin hořčíku*. Brno, 2012. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=56796](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=56796).
- [8] HALAMA, R. *Řešení elastoplastické napjatosti v bodovém styku dvou zakřivených těles pomocí MKP: doktorská disertace*. Ostrava: VŠB-TU Fakulta strojní, 2005. 130 s., 3 příl.
- [9] ZAJÍC, P. *Identifikace konstant Chabocheova modelu plasticity*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita, 2008.

- [10] HALAMA, R. *Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů: habilitační práce*. Ostrava: VŠB-TU Fakulta strojní, 2009. 141 s., 4 příl.
- [11] PRAGER, W. *A New Method of Analysing Stresses and Strains in Work Hardening Plastic Solids*. Journal of Applied Mechanics, 1956, vol. 23, p. 493-496.
- [12] BESSELING, J.F. *A Theory of Elastic, Plastic, and Creep Deformations of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep*. Journal of Applied Mechanics, 1958, vol. 25, p. 529-536.
- [13] MROZ, Z. *On the Description of Anisotropic Work Hardening*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, Vol. 15, p. 163–175.
- [14] DAFALIAS, Z.F.; POPOV, E.P. *Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity*, Journal of Applied Mechanics, 1976, Vol. 43, p. 645–650.
- [15] Ziegler, H. (1959). *A modification of Prager's hardening rule*. Quart. Appl. Math. 17, p. 55-65.
- [16] ARMSTRONG, P.J.; FREDERICK, C.O. *A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect*, G.E.G.B. Report RD/B/N, 731, 1966.
- [17] HALAMA, R.; ROBOVSKÁ, H.; VOLKOVÁ, L.; SKOČOVSKÝ, T.; STACHA, D.; ŠVRČEK, M.; VICHÉREK, A. *Parameter Identification of Chaboche Nonlinear Kinematic Hardening Model*. In: Sborník konference Aplikovaná mechanika 2007, Malenovice 16.-19.4.2007. Ed. Frydryšek K. et al. Ostrava: VŠB-TUO Katedra pružnosti a pevnosti, 2007, 97-98. ISBN 978-80-248-1389-9.
- [18] CHABOCHE, J.L.; DANG VAN, K.; CORDIER, G. *Modelization of The Strain Memory Effect on The Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel*, In: 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Division L11/3, Berlin, 13.-17. August 1979, Ed. Jaeger A and Boley B A. Berlin: Bundesanstalt für Materialprüfung, p.1-10.
- [19] ANSYS, Inc. *ANSYS Release 17.0 Help*, 2016. Dostupné z: [https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_LINK180.html](https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_LINK180.html)

- [20] ANSYS, Inc. *ANSYS Release 16.2.3 Help*, 2016. Dostupné z:  
[https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_PIPE288.html](https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_PIPE288.html)

Technical drawing of a mechanical part, a tensile specimen, with dimensions and surface finish requirements.

**Dimensions:**

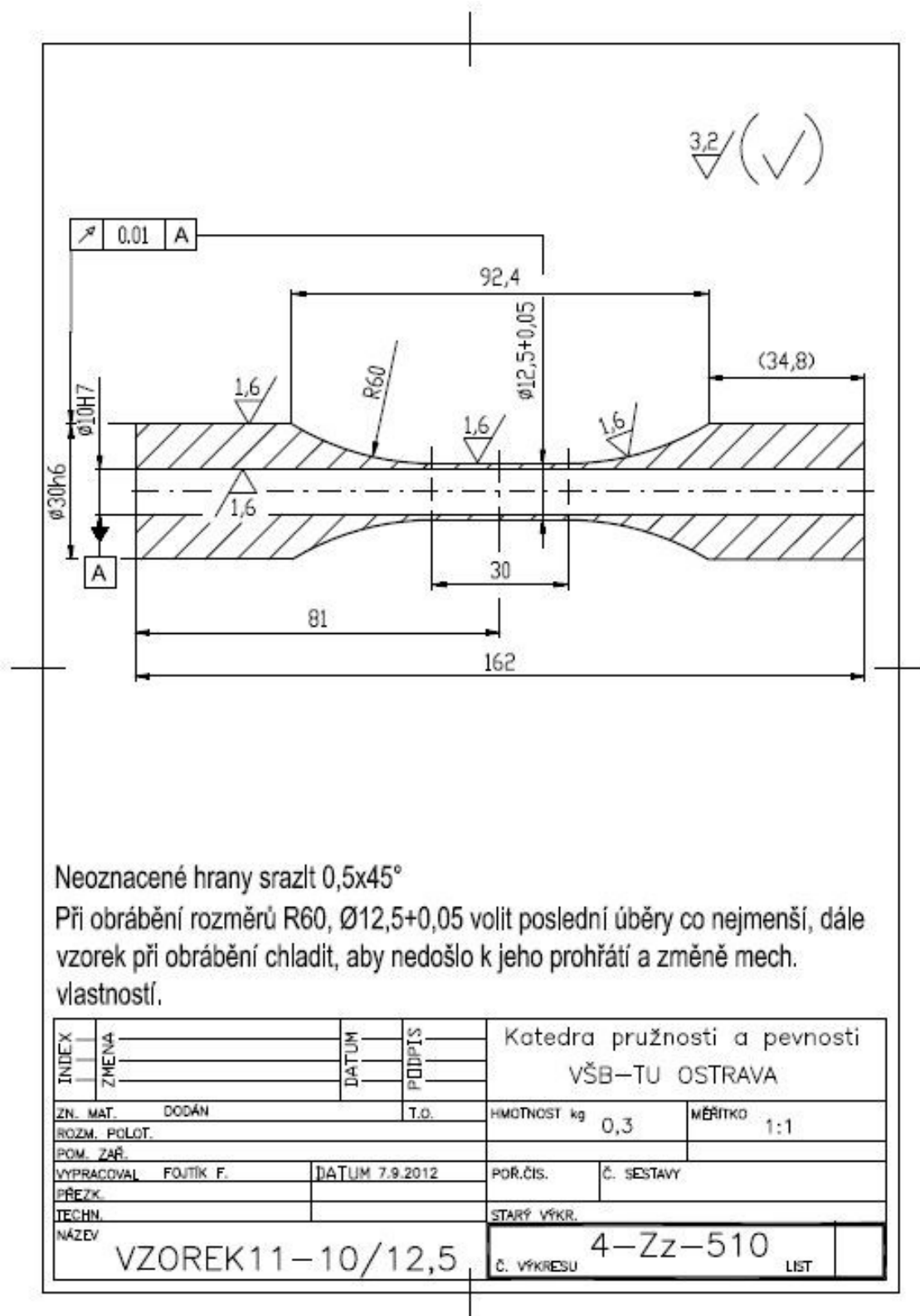
- Overall length: 120
- Length of the central gauge section: 60
- Radius of the transition: R60
- Width of the central gauge section: 6
- Width of the grip section: 15
- Inner diameter of the grip section:  $\phi 15h6$
- Outer diameter of the grip section:  $\phi 15h6$
- Distance from the left grip section to the start of the gauge section: 30
- Distance from the end of the gauge section to the right grip section: 30

**Surface Finish Requirements:**

- Top surface:  $3,2 / \left( \frac{0,8}{\nabla} \frac{1,6}{\nabla} \right)$
- Inner cylindrical surface:  $0,01 \text{ A}$
- Bottom surface:  $0,8 / \nabla$
- Right grip section:  $0,8 / \nabla$

**Material and Heat Treatment:** NEOZNAČENÉ HRANY SRAZIT  $0,5 \times 45^\circ$

## Příloha B – Výkres zkušebního vzorku dutého



## Příloha C – CD nosič

- Text diplomové práce
- Vytvořené makro pro výpočet simulace tahu-tlaku v programu ANSYS APDL
- Vytvořené makro pro výpočet simulace krutu v programu ANSYS APDL
- Vytvořené makro pro výpočet simulace kombinace namáhání tahu-tlaku a krutu v programu ANSYS APDL
- Vytvořené makro pro výpočet simulace ratchetingu v programu ANSYS APDL